TUGAS AKHIR – SM141501

IDENTIFIKASI VARIABEL PADA SISTEM TEREDUKSI LINIER WAKTU KONTINU

SHEERTY PUTRI PERTIWI
NRP 1212 100 045

Dosen Pembimbing
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

FINAL PROJECT – SM141501

VARIABLE IDENTIFICATION OF REDUCED CONTINOUS-TIME LINEAR SYSTEMS

SHEERTY PUTRI PERTIWI
NRP 1212 100 045

Supervisors
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2017

LEMBAR PENGESAHAN

IDENTIFIKASI VARIABEL PADA SISTEM TEREDUKSI LINIER WAKTU KONTINU

VARIABLE IDENTIFICATION OF REDUCED CONTINOUS-TIME LINEAR SYSTEMS

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang minat Matematika Terapan
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :
SHEERTY PUTRI PERTIWI
NRP. 1212 100 045

Menyetujui,

Pembimbing II,	Pembimbing I,
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.	Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si.
NIP. 19830517 200812 1 003	NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA-ITS

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T.
NIP. 19700831 199403 1 003
Surabaya, 19 Januari 2017

IDENTIFIKASI VARIABEL PADA SISTEM TEREDUKSI LINIER WAKTU KONTINU

Nama Mahasiswa	:	Sheerty Putri Pertiwi
NRP	:	1212 100 045
Jurusan	:	Matematika FMIPA-ITS
Dosen Pembimbing	:	Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstrak

Permasalahan yang ada di lingkungan sekitar dapat dimodelkan menjadi suatu sistem baru yang mencakup variabel - variabel dan operasi matematika. Semakin banyak variabel permasalahan yang ada, semakin besar pula sistem yang terbentuk sehingga penyelesaiannya membutuhkan waktu yang lama pula. Perlu adanya penyederhanaan sistem atau lebih dikenal dengan reduksi model. Sistem awal dan sistem tereduksi tentunya memiliki orde yang berbeda sehingga hasilnya tidak dapat dibandingkan secara langsung. Tugas Akhir ini membahas bagaimana mengidentifikasi sistem tereduksi waktu linier kontinu sehingga sistem dapat bersesuaian dengan sistem awal. Metode yang digunakan untuk reduksi adalah metode pemotongan setimbang, dimana metode tersebut mampu mempertahankan sifat awal sistem seperti kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem. Selanjutnya Identifikasi sistem dilakukan dengan mendapatkan penyelesaian persamaan sistem awal,sistem setimbang dan sistem tereduksi.

Kata Kunci *: Reduksi Model, Sistem Linier Waktu Kontinu, Metode Pemotongan Setimbang, Sistem Setimbang*

.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

VARIABLE IDENTIFICATION OF REDUCED CONTINOUS-TIME LINEAR SYSTEMS

Name	:	Sheerty Putri Pertiwi
NRP	:	1212 100 045
Department	:	Mathematics FMIPA-ITS
Supervisors	:	Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si

Abstract

Problems in surroundings can be modeled into new systems including variables and mathematical operations. The more variable involved, the greater the system is formed so that completion takes a long time. Thus it needs simplification of system or better known as model reduction. The initial system and reduced system have different order so that the result cannot be compared directy. This research discusses how to identify reduced continous-time linear system so that initial system and reduced system can be compared with initial system. The method used is balanced truncation, which is able to maintain characteristics of initial system such as stability, controllability and observability. System identification is accomplished by getting solution of nitial system, balance realization and reduced system.

Keyword : *Model Reduction, Continous-Time Linear System, Balance Truncation Method, Balance Realization*

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan pada kehadirat Allah Swt. karena hanya dengan karunia rahmat, bimbingan, serta anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **Identifikasi Variabel Pada Sistem Tereduksi Linier Waktu Kontinu.**

Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA-ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si dan Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si sebagai dosen pembimbing Tugas Akhir atas segala bimbingan dan motivasi yang telah diberikan pada penulis.
3. Bapak Drs. Suharmadi, Dipl. Sc, M.Phil, Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si, dan Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan untuk perbaikan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si selaku Kaprodi dan Bapak Drs. Iis Herisman, M.Sc selaku Sekretaris Kaprodi S1 Jurusan Matematika ITS yang telah memberi dukungan dan kemudahan pengurusan persyaratan-persyaratan selama penulis menyelesaikan Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. Mohammad Setijo Winarko, M.Si selaku dosen wali penulis yang telah memberikan motivasi dan arahan akademik.
6. Bapak dan Ibu Dosen serta seluruh staf Tata Usaha dan Laboratorium Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
7. Keluarga tercinta terutama Bapak Matsudjoni dan Ibu Noniek Widijawati Soeyoso, penulis ucapkan banyak terima kasih

atas doa serta dukungan yang telah diberikan baik moral maupun material, serta Muhammad Husen Azis yang telah memberikan semangat dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

8. Sahabat – sahabat penulis Kinan, Rita, Muthia, Lena, Maya, Firda, Laras, Pipit yang telah menemani, memberikan semangat, hiburan serta tempat berbagi apapun.
9. Teman – teman seperjuangan Matematika ITS 2011 dan 2012 khususnya MAT12IKS tercinta yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak.
10. Seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang turut membantu dalam penyusunan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan laporan ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis memohon saran dan kritik sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

DAFTAR ISI

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR SIMBOL

$\dot{x}(t)$: Masukan sistem awal
$y(t)$: Keluaran sistem awal
A : Matriks A sistem awal
B : Matriks B sistem awal
C : Matriks C sistem awal
D : Matriks D sistem awal
λ : Nilai eigen
$\mathrm{M_c}$: Matriks keterkendalian sistem awal
$\mathrm{M_o}$: Matriks keteramatan sistem awal
W : Gramian keterkendalian sistem awal
M : Gramian keteramatan sistem awal
ϕ : Matriks segitiga atas yang memenuhi $\phi^{\mathrm{T}}\phi = \mathrm{W}$
U : Matriks *Unitary*
T : Matriks transformasi
σ : Nilai Singular Hankel
$\dot{\tilde{\mathrm{x}}}(\mathrm{t})$: Masukan sistem setimbang
$\tilde{\mathrm{y}}(\mathrm{t})$: Keluaran sistem setimbang
$\mathrm{x_o}$: Kondisi awal sistem awal
$x(t)$: Penyelesaian diferensial sistem awal
$\widetilde{\mathrm{A}}$: Matriks A sistem setimbang
$\widetilde{\mathrm{B}}$: Matriks B sistem setimbang
$\tilde{\mathrm{C}}$: Matriks C sistem setimbang
$\widetilde{\mathrm{W}}$: Gramian keterkendalian sistem setimbang
$\widetilde{\mathrm{M}}$: Gramian keteramatan sistem setimbang
Σ : Gramian kesetimbangan
$\widetilde{\mathrm{M_c}}$: Matriks keterkendalian sistem setimbang
$\widetilde{\mathrm{M_o}}$: Matriks keteramatan sistem setimbang
$\tilde{x}(t)$: Penyelesaian sistem setimbang

$\dot{\tilde{x}}_r(t)$: Masukan sistem tereduksi
$\tilde{y}_r(t)$: Keluaran sistem tereduksi
v : Vektor eigen
t : Waktu
$\tilde{A}_r$: Matriks A sistem tereduksi
$\tilde{B}_r$: Matriks B sistem tereduksi
$\tilde{C}_r$: Matriks C sistem tereduksi
$\tilde{x}_r(t)$: Penyelesaian diferensial sistem tereduksi
x_{id} : Identifikasi sistem
T_r : r kolom pertama invers matriks tranformasi T

DAFTAR LAMPIRAN

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB I
PENDAHULUAN

Bab ini membahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Didalamnya mencakup identifikasi permasalahan pada topik Tugas Akhir. Uraian ini bersifat umum yang menjelaskan secara ringkas hal-hal yang dilakukan pada penyelesaian Tugas Akhir. Informasi yang telah diperoleh tersebut kemudian dirumuskan menjadi permasalahan, kemudian diberikan asumsi-asumsi dan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang

Pendidikan memiliki peranan penting dalam membangun karakter seseorang, dapat memperluas cara berpikir dan membantu dalam penyelesaian masalah yang ada. Contohnya saja dalam ilmu matematika, permasalahan yang ada bisa dijadikan sebuah model baru untuk mempermudah penyelesaian. Permasalahan tersebut dapat dibentuk ke dalam sebuah persamaan baru yang terdiri dari banyak variabel dan operasi matematika. Semakin banyak permasalahan yang ada, semakin besar pula sistem yang akan terbentuk. Banyaknya variabel yang digunakan dalam model membuat penyelesaiannya membutuhkan waktu yang lebih lama. Sistem dengan banyak variabel dirasa kurang efektif sehingga perlu disiasati dengan mengurangi faktor – faktor yang berpengaruh kecil dalam sistem. Sistem yang ada biasanya berorde besar, sehingga dibutuhkan penyederhanaan sistem agar sitem memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem dengan pengurangan orde ini lebih dikenal dengan reduksi model [3].

Di dalam matematika sendiri, reduksi model memiliki banyak metode, diantaranya adalah metode Pemotongan Setimbang. Metode Pemotongan Setimbang menjamin sifat-sifat dari sistem awal selalu dipertahankan [2]. Sistem hasil reduksi dengan metode Pemotongan Setimbang akan mempunyai sifat yang sama dengan sifat sistem semula yaitu stabil, terkendali dan teramati. Metode Pemotongan Setimbang dilakukan dengan cara membentuk sistem setimbang melalui transformasi sistem awal. Variabel pada sistem awal masih tersusun secara acak, sedangkan pada sistem setimbang sudah terurut berdasarkan pengaruhnya terhadap sistem [10]. Sehingga posisi variabel pada sistem setimbang berbeda dengan variabel pada sistem awalnya.

Setelah sistem setimbang terbentuk, selanjutnya dilakukan pemotongan terhadap variabel keadaan berdasarkan pengaruhnya terhadap sistem. Variabel keadaan yang mempunyai pengaruh besar terhadap sistem dipertahankan, sedangkan variabel keadaan yang mempunyai pengaruh kecil akan dipotong atau dibuang. Variabel yang mempunyai pengaruh kecil ini adalah variabel yang susah dikendalikan dan diamati serta bersesuaian dengan nilai singular hankel yang kecil [1]. Pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular Hankel dimana terjadi loncatan besar atau dipilih urutan singular Hankel ke-r dimana $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ sehingga diperoleh model tereduksi yang berukuran r.

Dari uraian di atas, maka variabel pada sistem tereduksi akan berbeda dengan variabel sistem awal. Sehingga untuk mendapatkan perbandingan yang tepat antara sistem awal dengan sistem tereduksinya, maka perlu adanya identifikasi variabel yg bersesuaian antara sistem awal dan sistem tereduksi.

Berdasarkan latar belakang di atas, pada Tugas Akhir ini akan dilakukan identifikasi variabel sistem tereduksi linier waktu kontinu dan akan dilakukan juga simulasi reduksi model dan identifikasi variabel pada sistem tereduksi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, penulis merumuskan masalah yang akan diselesaikan yaitu bagaimana proses identifikasi variabel pada sistem tereduksi linier waktu kontinu menggunakan metode pemotongan setimbang.

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan dalam tugas akhir ini antara lain:

1. Sistem linear kontinu dengan matriks konstan atau invarian terhadap waktu.
2. Sistem awal harus bersifat stabil asimtotik, terkendali dan teramati.
3. Metode yang digunakan untuk reduksi model adalah Metode Pemotongan Setimbang.
4. Software yang digunakan adalah Matlab.

1.4 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, tujuan tugas akhir ini adalah:

1. Melakukan identifikasi variabel pada sistem tereduksi linier waktu kontinu.
2. Memperoleh hasil simulasi reduksi model dan identifikasi variabel pada sistem tereduksi

1.5 Manfaat

Hasil tugas akhir ini diharapkan memiliki manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai pembentukan sistem awal hingga sistem tereduksi linier waktu kontinu.
2. Memberikan informasi mengenai identitas sistem tereduksi linier waktu kontinu
3. Sebagai literatur dalam pengembangan ilmu matematika terapan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan laporan tugas akhir.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Menjelaskan tentang penelitian terdahulu, sistem linier waktu kontinu, kestabilan sistem, keterkendalian sistem, keteramatan sistem, gramian keterkendalian dan gramian keteramatan, dan reduksi model.

BAB III METODE PENELITIAN

Menjelaskan tentang langkah – langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Menjelaskan tentang pembentukan matriks transformasi T, pembentukan sistem setimbang, langkah – langkah identifikasi sistem, dan simulasi dari identifikasi sistem tersebut.

BAB V PENUTUP

Berisi kesimpulan dari keseluruhan pengerjaan tugas akhir ini dan saran yang diberikan untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas tinjauan pustaka yang mendasari penulisan Tugas Akhir serta metode penunjang yang digunakan dalam penelitian ini. Di dalamnya mencakup penelitian yang telah ada dan landasan teori.

2.1 Penelitian Terdahulu

Manfaat reduksi model salah satunya adalah penyederhanaan sistem yang besar ke ke sistem yang lebih kecil sehingga waktu komputasinya pun semakin kecil. Tentunya sistem baru yang dihasilkan diharapkan memiliki kesalahan yang tidak signifikan. Pada pengaplikasiannya, reduksi model sendiri sudah banyak diterapkan di model matematika. Reduksi model sendiri sudah diteliti sejak beberapa tahun yang lalu. Salah satunya, pada tahun 1995 Gregoriadis membahas syarat perlu dan cukup untuk eksistensi solusi permasalahan model reduksi $H\infty$ untuk waktu kontinu dan diskrit [3].

Saat ini, masih banyak peneliti yang mempelajari reduksi model untuk diterapkan ke bidang yang lebih luas. Pada tahun 2013, Sudipta Ghosh dan Nilanjan Senroy menerapkan reduksi model dalam pemodelan sebuah peternakan yang menggunakan angin sebagai sumber energinya [11]. Kemudian, Didik Khusnul Arif (2014) melakukan penelitian tentang konstruksi dan implementasi algoritma Filter-Kalman pada model tereduksi [2]. Tahun ini, Dyah Ayu Kartika (2016) membuat penelitian tentang analisis reduksi model sistem linier waktu kontinu menggunakan metode pemotongan setimbang [10]. Menurut hasil penelitian Dyah Ayu, menunjukkan bahwa sistem awal dan sistem tereduksi menunjukkan kesamaan sifat dan semakin kecil variabel yang direduksi perbandingan *error* yang dihasilkan juga semakin kecil.

Berdasarkan penelitian tersebut, pada penelitian kali ini akan dibahas tentang bagaimana mengidentifikasi variabel model tereduksi sistem linier waktu kontinu dengan metode pemotongan setimbang agar menghasilkan sistem yang lebih akurat.

2.2 Landasan Teori

Pada sub bab ini, akan dijelaskan tentang sistem linier waktu kontinu, sifat – sifat sistem, gramian keterkendalian, gramian keteramatan, metode pemotongan setimbang dan reduksi model.

2.2.1. Sistem Linier Waktu Kontinu

Sistem adalah suatu model matematika dari suatu proses fisis yang berkaitan dengan sinyal masukan dan sinyal keluaran. Misalkan x dan y adalah sinyal masukan dan keluaran dari suatu sistem, maka sistem dapat dipandang sebagai suatu transformasi (pemetaan) dari x pada y. Sistem waktu kontinu adalah pada saat sinyal masukan $x(t)$ dan keluaran $y(t)$ adalah sinyal kontinu, yaitu bila t adalah peubah kontinu di himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ [5] . Misalkan diberikan suatu sistem linier waktu kontinu sebagai berikut [5]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2}$$

dengan

$\dot{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ adalah sistem masukan *(input system)*

$y(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah sistem keluaran *(output system)*

A, B, C, D adalah matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian

Sesuai persamaan di atas, sistem di atas selanjutnya akan disebut Sistem (A, B, C, D).

2.2.2. Kestabilan Sistem

Konsep kestabilan sistem linier waktu kontinu yang akan digunakan dalam pembahasan ini adalah

Definisi 2.1 [5]

Diberikan suatu sistem dimensi-n $\dot{x} = Ax$. *Ruang bagian stabil untuk sistem linier (2.1) dan (2.2) adalah ruang bagian (real) dari jumlahan – langsung dari ruang bagian linier dengan* *nilai karakteristik dari A yaitu nilai- nilai karakteristik dengan bagian real lebih kecil dari nol. Ruang bagian tak stabil didefinisikan dengan cara serupa, yaitu berkaitan dengan bagian real tak negatif.*

Teorema berikut memberikan syarat kestabilan dari persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dimana matriks A mempunyai peranan penting khusunya nilai karakteristik dari matriks A yaitu bagian riil dari λ yang dinotasikan oleh $Re\lambda$.

Teorema 2.1[5]

Diberikan persamaan differensial $\dot{x} = Ax$ dengan matriks A berukuran $n\,x\,n$ dan mempunyai nilai karakteristik berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k (k \leq n)$.

i. *Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re\lambda_1 < 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$*
ii. *Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah stabil jika dan hanya jika $Re\lambda_1 < 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$ dan untuk semua λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar sama dengan multiplisitas geometrinya.*
iii. *Titik setimbang $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil jika dan hanya jika $Re\lambda_1 > 0$ untuk semua $i = 1,2, \dots, k$ atau ada λ_i dengan $Re\lambda_i = 0$ multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya.*

2.2.3. Keterkendalian Sistem

Definisi 2.2 [5]

Sistem linier (2.1) dan (2.2) dikatakan terkendali jika untuk setiap keadaan sebarang $x(0) = x_0$ ada masukan $u(t)$ yang tidak dibatasi mentransfer keadaan x_0 ke sebarang keadaan akhir $x(t_1) = x_1$ dengan waktu akhir t_1 hingga.

Selanjutnya diberikan suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem terkendali [5].

Teorema 2.2 [5]

Syarat perlu dan cukup sistem (2.1) dan (2.2) terkontrol :

i. *Matriks*

$$W(t) := \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} \, d\tau$$

Non - singular

ii. *Matriks keterkendalian*

$$M_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \ldots \quad A^{n-1}B] \tag{2.3}$$

Mempunyai rank sama dengan n.

2.2.4. Keteramatan Sistem

Definisi 2.3 [5]

Bila setiap keadaan awal $x(0) = x_0$ secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem dan dari waktu $t = 0$ ke $t = t_1$, maka sistem dikatakan teramati.

Selanjutnya diberikan suatu teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu sistem teramati [5].

Teorema 2.3 [5]

Syarat perlu dan cukup sistem (2.1) dan (2.2) teramati :

i. *Matriks*

$$M(t) := \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} \, d\tau$$

Non – singular

ii. *Matriks keteramatan*

$$M_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Mempunyai rank sama dengan n.

2.2.5. Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Pada sistem linier waktu kontinu juga didefinisikan gramian keterkendalian, W, dan gramian keteramatan , M , yaitu :

$$W = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau}\, d\tau \tag{2.5}$$

$$M = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C e^{A\tau}\, d\tau \tag{2.6}$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan Gramian keterkendalian W dan Gramian keteramatan M dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4 [2]

Diberikan sistem (A, B, C, D) *yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian* W, *dan Gramian ketereamatan* M, *masing-masing merupakan penyelesaian tunggal dan definit positif dari persamaan Lyapunov*

$$AW + WA^T + BB^T - W = 0 \tag{2.7}$$

$$A^T M + MA + C^T C - M = 0 \tag{2.8}$$

Pengertian definit positif diberikan pada definisi berikut

Definisi 2.4 [7]

Bentuk kuadrat dari $x^T A x$ *dikatakan definit positif jika* $x^T A x > 0$, $\forall x \neq 0$ *dan matriks simetri* A *dikatakan matriks definit positif jika* $x^T A x$ *adalah bentuk kuadrat definit positif.*

Syarat definit positif diberikan pada teorema berikut

Teorema 2.5 [7]

Sebuah matriks simetri A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigennya bernilai positif.

2.2.6. Reduksi Model Waktu Kontinu dengan Pemotongan Setimbang

Reduksi model merupakan salah satu metode yang digunakan untuk penyederhanaan suatu sistem. Metode reduksi model yang digunakan pada penelitian ini adalah Metode Pemotongan Setimbang. Pada sub bab ini akan dibahas lebih lanjut mengenai sistem setimbang, metode pemotongan setimbang dan sistem tereduksi.

2.2.6.1. Sistem Setimbang

Pembentukan sistem setimbang diperoleh dengan mencari matriks transformasi T. Matriks transformasi T didefinisikan sebagai matriks yang mentransformasikan sistem awal dengan urutan variabel yang masih acak menjadi sistem setimbang dengan urutan variabel yang lebih runtut. Variabel yang memiliki pengaruh besar pada sistem diletakkan di atas, sedangkan variabel sistem yang berpengaruh kecil diletakkan di bawah. Sehingga akan diperoleh sistem baru

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\,\tilde{x}(t) + \tilde{B}\,\tilde{u}(t) \tag{2.9}$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{C}\,\tilde{x}(t) + D\,\tilde{u}(t) \tag{2.10}$$

yang selanjutnya disebut sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$.

Sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ merupakan bentuk pendekatan dari sistem awal (A, B, C, D) yang diasumsikan stabil, terkendali dan teramati serta mempunyai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang sama dan merupakan matriks diagonal [3]. Seperti yang diberikan pada definisi berikut.

Definisi 2.5 [4]

Sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ disebut sistem setimbang dari sistem (A, B, C, D) jika sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ mempunyai gramian keterkendalian, $\widetilde{W}$, dan gramian keteramatan, $\widetilde{M}$, yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov

$$\tilde{A}\,\widetilde{W} + \widetilde{W}\,\tilde{A}^T + \tilde{B}\,\tilde{B}^T = 0 \tag{2.11}$$

$$\tilde{A}^T\,\widetilde{M} + \widetilde{M}\,\tilde{A} + \tilde{C}^T\,\tilde{C} = 0 \tag{2.12}$$

Sedemikian hingga memenuhi

$$\widetilde{W} = \widetilde{M}$$
$$= diag\ (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r \geq \cdots \geq \sigma_n \qquad (2.13)$$

dengan σ_i *menyatakan nilai singular Hankel dari sistem* (A, B, C, D) *yang dapat didefinisikan sebagai*

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}\ , i = 1, \ldots, n \qquad (2.14)$$

dengan λ_i *adalah nilai – nilai eigen dari* WM.

2.2.6.2. Sistem Tereduksi

Sistem tereduksi adalah sebuah sistem yang mengalami pengurangan variabel agar diperoleh sistem yang lebih sederhana. Sistem yang direduksi akan memiliki sifat yang hampir sama dengan sistem awal. Pembentukan sistem tereduksi diperoleh dari pengurangan variabel keadaan dari sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ menggunakan metode pemotongan setimbang.

Variabel keadaan pada sistem setimbang yang sulit dikendalikan dan diamati akan dipotong berdasarkan urutan nilai singular Hankel dimana terjadi loncatan besar atau dipilih urutan singular Hankel ke-r sehingga menghasilkan sistem tereduksi berukuran r yang dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \tilde{A}_r\ \tilde{x}(t) + \tilde{B}_r\ \tilde{u}(t) \qquad (2.15)$$
$$\tilde{y}_r(t) = \tilde{C}_r\ \tilde{x}(t) + D\ \tilde{u}(t) \qquad (2.16)$$

“Halaman ini sengaja dikosongkan”

BAB III
METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah – langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir ini. Disamping itu dijelaskan pula prosedur dalm proses pelaksanaan tiap – tiap langkah yan digunakan dalm penyelesaian Tugas Akhir

3.1 Studi Literatur

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa Tugas Akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

3.2 Analisa Sistem Awal

Pada tahap ini ditentukan matriks sistem awal (A, B, C, D). Kemudian dilakukan analisa sifat sistem dan perilaku sistem, sehingga sistem awal (A, B, C, D) bersifat stabil, terkendali dan teramati. Setelah analisa sifat sistem terpenuhi, akan dicari nilai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan.

3.3 Pembentukan Sistem Setimbang

Dalam pembentukan sistem setimbang diperlukan matriks transformasi T. Sehingga terlebih dahulu kita harus mencari matriks $\boldsymbol{\phi}$, matriks $\boldsymbol{U}$ *(Unitary)* dan matriks diagonalnya. Hasil dari matriks transformasi nantinya akan menghasilkan sistem baru yang selanjutnya disebut sistem setimbang $(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}, \boldsymbol{D})$.

3.4 Analisa Sistem Tereduksi

Dari sistem setimbang yang terbentuk, sistem akan direduksi dengan menggunakan metode pemotongan setimbang. Variabel keadaan yang susah dikendalikan dan diamati akan dihilangkan. Sistem awal akan memiliki orde lebih besar dibandingkan sistem tereduksi. Akan dilihat apakah sifat –sifat sistem tereduksi masih mempertahankan sifat sistem awal.

3.5 Mengidentifikasi Sistem Tereduksi

Sistem awal dan sistem tereduksi memiliki orde yang berbeda sehingga hasilnya tidak dapat dibandingkan secara langsung. Oleh karena itu, pada tahap ini dilakukan identifikasi terhadap sistem tereduksi agar memiliki orde yang bersesuaian dengan sistem awal.

3.6 Simulasi Hasil dan Analisis

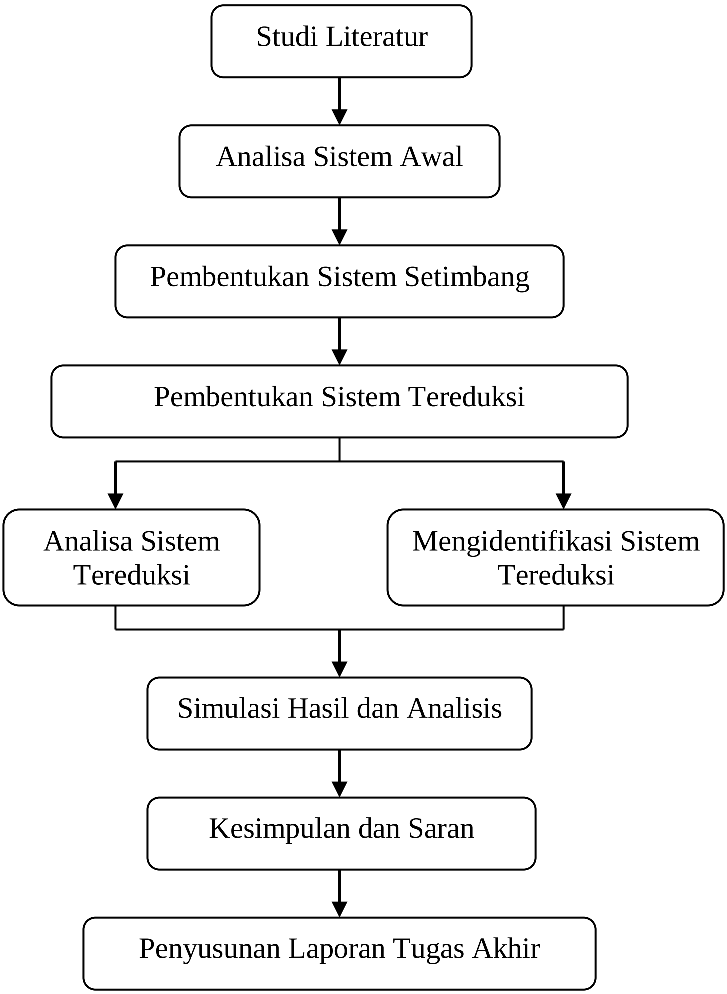
Hasil analisa sistem awal, sistem setimbang, sistem tereduksi dan identifikasi sistem yang telah didapat akan dibuat simulasinya menggunakan *software* MATLAB

3.7 Kesimpulan dan Saran

Pada tahap ini dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan hasil analisis. Selanjutnya akan diberikan masukan dan perbaikan sebagai acuan penelitian selanjutnya.

3.8 Diagram Alir

Diagram alir penelitian yang dilakukan dalam Tugas Akhir ini disajikan pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Diagram Alir

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Dalam reduksi model, sistem yang dihasilkan memiliki orde yang berbeda dengan sistem awalnya. Meskipun banyak penelitian yang menyatakan hasil reduksi model tetap mempertahankan sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem awal, namun hasil akhirnya tidak dapat dibandingkan secara langsung karena variabel keadaan yang sudah berkurang.Untuk itu perlu adanya identifikasi terhadap sistem reduksi. Identifikasi sistem yang dimaksud adalah dengan memperhatikan pembentukan sistem setimbang yang kemudian akan digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan sistemnya. Penyelesaian persamaan itu yang akan dibandingkan. Hasil akhir dari identifikasi sistem mempunyai dimensi yang sama dengan sistem awalnya, sehingga sistem bisa dicari *error* tiap variabel keadannya.

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai reduksi model dan proses identifikasi sistem beserta langkah - langkahnya. Setelah itu akan dilakukan simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB.

4.1 Reduksi Model

Suatu sistem yang memiliki banyak variabel keadaan membutuhkan waktu yang lebih lama dalam pengerjaannya. Hal ini dirasa kurang efektif sehingga perlu dilakukan reduksi model. Reduksi model adalah proses penyederhanaan yang dilakukan untuk mengurangi orde sistem tanpa kesalahan yang signifikan. Pada sistem awal, susunan variabel keadaan yang ada masih acak. Untuk itu sistem perlu disetimbangkan. Suatu sistem dikatakan setimbang bila variabelnya sudah terurut berdasarkan pengaruhnya terhadap sistem [10]. Variabel keadaan yang terurut disusun berdasarkan nilai singular hankel. Setelah sistem setimbang didapat, akan dilakukan pemotongan terhadap variabel yang memiliki nilai singular hankel kecil karena semakin kecil nilai singular hankelnya semakin kecil pula pengaruhnya terhadap sistem. Pemotongan sistem setimbang nantinya menghasilkan sistem baru yang selanjutnya disebut sistem tereduksi.

Pada subbab ini akan dibahas mengenai pembentukan sistem tereduksi yang meliputi mekanisme pembentukan sistem setimbang dan pemotongan variabel keadaan sistem setimbang menggunakan metode pemotongan setimbang.

4.1.1 Pembentukan Sistem Setimbang

Untuk mendapatkan sistem yang setimbang dilakukan dengan cara mentransformasikan matriks T ke dalam sistem awal. Selanjutnya akan dicari gramian keterkendalian dan gramian keteramatannya. Jika hasilnya bernilai sama maka disebut sebagai gramian kesetimbangan [1]. Matriks transformasi T didefinisikan sebagai matriks yang mentransformasikan sistem awal dengan urutan variabel yang masih acak menjadi sistem setimbang dengan urutan variabel yang lebih runtut. Variabel yang memiliki pengaruh besar pada sistem diletakkan di atas, sedangkan variabel sistem yang berpengaruh kecil diletakkan di bawah. Algoritma pembentukan matriks transformasi T adalah sebagai berikut [2,4]:

a. Diasumsikan sistem (A, B, C, D) stabil, terkendali dan teramati.
b. Tentukan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan dari sistem.
c. Tentukan matriks ϕ sedemikian hingga berlaku $W = \phi^T\phi$
d. Konstruksi matriks $\phi M \phi^T$ kemudian diagonalisasi matriks tersebut sehingga berlaku $\phi M \phi^T = U\Sigma^2\mathrm{U}^\mathrm{T}$

   Dimana

   $U = matriks\ unitary$

   $\Sigma\ =\ \mathrm{diag}(\sigma_1\,, \sigma_2\,, \dots, \sigma_n)$

   $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}\ dengan\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$
e. Didefinisikan matriks non – singular T sebagai

$$T = \phi^T U \Sigma^{-1/2} \tag{4.1}$$

Setelah didapat matriks transformasi T sesuai persamaan (4.1), selanjutnya akan dibentuk sistem setimbang sebagai berikut.

Secara umum, diberikan $T \in \mathbb{R}^{nxn}$ adalah matriks non-singular. Didefinisikan [2] :

$$x(t) = T\tilde{x}(t) \tag{4.2}$$

$$y(t) = T\tilde{y}(t) \tag{4.3}$$

Berdasarkan definisi di atas, sistem menjadi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) \tag{4.4}$$

$$y(t) = T\tilde{y}(t) \tag{4.5}$$

Untuk mendapatakan sistem masukan yang setimbang, substitusi persamaan (2.1) dan (4.2) ke (4.4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}\big(Ax(t) + Bu(t)\big)\\ &= T^{-1}\big(AT\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)\big)\\ &= T^{-1}AT\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)\end{aligned} \tag{4.6}$$

Untuk mendapatkan sistem keluaran yang setimbang, substitusi persamaan (2.2) ke (4.3) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) + Du(t)\\ y(t) &= CT\tilde{x}(t) + D\tilde{u}(t)\end{aligned} \tag{4.7}$$

Sesuai persamaan di atas, maka persamaan sistem setimbang dapat ditulis menjadi

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\,\tilde{u}(t) \tag{4.8}$$

$$y(t) = \tilde{C}\,\tilde{x}(t) + D\,\tilde{u}(t) \tag{4.9}$$

Dengan

$$\tilde{A} = T^{-1}\,A\,T \quad ; \; \tilde{B} = T^{-1}\,B \quad ; \; \tilde{C} = C\,T \tag{4.10}$$

Selanjutnya sistem setimbang yang terbentuk akan disebut sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$. Gramian keterkendalian dari sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ dapat diperoleh dengan substitusi persamaan (2.5) ke (4.10). Sehingga diperoleh

$$W = T\widetilde{W}T^T$$

Dengan

$$\widetilde{W} = \int_0^t e^{\tilde{A}\tau}\tilde{B}\,\tilde{B}^T e^{\tilde{A}^T\tau}\,d\tau$$

Berdasarkan persamaan di atas, gramian keterkendalian sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\widetilde{W} = T^{-1} W (T^{-1})^T$$

Gramian keteramatan dari sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ dapat diperoleh dengan substitusi persamaan (2.6) ke (4.10). Sehingga diperoleh

$$M = (T^{-1})^T \widetilde{M} T^{-1}$$

Dengan

$$\widetilde{M} = \int_0^t e^{A^T\tau} C^T C\, e^{A\tau}\, d\tau$$

Berdasarkan persamaan di atas, gramian keterkendalian sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ dapat ditulis ke dalam bentuk

$$\widetilde{M} = T^T M T$$

Sesuai dengan persamaan (4.1), gramian keterkendalian $\widetilde{W}$ dan gramian keteramatan $\widetilde{M}$ ditulis kembali menjadi

$$\widetilde{W} = (\phi^T U \Sigma^{-1/2})^{-1}\, W((\phi^T U \Sigma^{-1/2})^{-1})^T \tag{4.11}$$

$$\widetilde{M} = (\phi^T U \Sigma^{-1/2})^T\, M(\phi^T U \Sigma^{-1/2}) \tag{4.12}$$

Dari persamaan (4.11) dan (4.12) diperoleh

$$\widetilde{W} = \widetilde{M} = \Sigma \tag{4.13}$$

Menurut hasil yang telah diperoleh pada persamaan (4.13) menunjukkan bahwa dengan mendefinisikan matriks transformasi $T = \phi^T U \Sigma^{-1/2}$, maka dari sistem (A, B, C, D) dapat dibentuk suatu sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ yang mempunyai gramian keterkendalian, $\widetilde{W}$, dan gramian keteramatan, $\widetilde{M}$, yang sama dan merupakan matriks diagonal Σ. Oleh karena itu, sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ disebut sebagai sistem setimbang dari sistem (A, B, C, D). Selanjutnya, Σ disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$.

4.1.2 Pemotongan Sistem Setimbang

Setelah diperoleh sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$, akan dilakukan pengurangan order menggunakan metode pemotongan setimbang. Sistem tereduksi didapat setelah menghilangkan variabel yang sulit dikendalikan dan diamati maupun yang berpengaruh kecil terhadap sistem. Variabel dengan pengaruh kecil adalah variabel keadaan yang bersesuaian dengan nilai singular hankel yang kecil pula. Nilai singular hankel didapat dan disusun berdasarkan penyelesaian persamaan berikut

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$$

Untuk
$i = 1,2,3, \ldots, n$
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$
$\lambda_i(WM) = nilai\ eigen\ gramian\ W * M$

Pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular hankel dimana terjadi perubahan yang besar atau memilih nilai singular hankel ke-r dimana $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Sehingga menghasilkan persamaan baru berukuran r yang dinyatakan dalam bentuk berikut :

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \tilde{A}_r\, \tilde{x}(t) + \tilde{B}_r\, \tilde{u}(t) \quad (4.14)$$

$$\tilde{y}_r(t) = \tilde{C}_r\, \tilde{x}(t) + D\, \tilde{u}(t) \quad (4.15)$$

Selanjutnya sistem tereduksi yang terbentuk akan disebut sistem $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D)$. Berdasarkan persamaan (4.14) dan (4.15), terlihat bahwa orde sistem tereduksi lebih kecil karena terjadi pemotongan variabel keadaan. Sistem $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D)$ ini yang nantinya akan diidentifikasi sehingga menghasilkan variabel keadaan yang tetap bersesuaian dengan sistem awalnya.

4.2 Identifikasi Sistem

Identifikasi sistem dilakukan untuk memperoleh perbandingan sistem awal dan sistem tereduksi. Sistem awal memiliki variabel keadaan yang tersusun secara acak. Setelah disetimbangkan dan direduksi ke orde yang lebih kecil, susunan variabel keadaannya sudah terurut sesuai nilai singular hankel. Sistem awal dan sistem reduksi ini memiliki dimensi matriks yang berbeda orde, sehingga tidak bisa dibandingkan secara langsung. Oleh karena itu perlu adanya identifikasi agar variabel keadaan kedua sistem dapat dibandingkan dengan dimensi matriks yang sama. Identifikasi dapat dicari melalui beberapa tahapan berikut.

(i). Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal

Misalkan diberikan suatu sistem awal sebagai berikut[12]

$$\dot{x} = Ax(t) \tag{4.16}$$

dengan kondisi awal $x(0) = x0$. Pandang sistem tersebut sebagai sistem homogen dimana A_{nxn} adalah matriks dengan elemen bilangan *real* konstan dan kontinu dalam interval t , mempunyai penyelesaian – penyelesaian yang berbeda dalam ruang vektor berdimensi n. Sedangkan $x(t)$ adalah penyelesaian persamaan (4.16) yang berupa vektor kolom dengan komponen $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Teorema 4.1[12]

Misalkan A_{nxn} matriks dengan elemen real konstan dan λ nilai eigen dari A yang berhubungan dengan vektor eigen v , maka

$$x(t) = e^{\lambda t}\, v$$

Adalah penyelesaian dari sistem persamaan differensial linier $\dot{x} = Ax$ dalam suatu interval.

Bukti :

Misalkan

$$x(t) = e^{\lambda t}\, v$$

adalah penyelesaian sistem persamaan differensial (4.16) sehingga

$$\dot{x} = \lambda\, e^{\lambda t}\, v$$

karena $x(t) = e^{\lambda t}\, v$ adalah penyelesaian persamaan (4.16) jika dan hanya jika

$$\lambda\, e^{\lambda t}\, v = A\, e^{\lambda t}\, v$$

hal ini mengakibatkan

$$\lambda\, v = A\, v$$

Akan tetapi λ haruslah nilai eigen dari A yang berpautan dengan vektor eigen v. Nilai – nilai eigen memiliki tiga kemungkinan, yaitu nilai eigennya *real* tetapi berbeda, nilai eigen *real* tetapi ada yang sama dan nilai eigen kompleks.

(ii). Mendapatkan Sistem Setimbang

Untuk mendapatkan sistem setimbang $\tilde{x}(t)$, digunakan persamaan (4.2) sebagai acuan. Sistem setimbang $\tilde{x}(t)$ diperoleh dari invers persamaan (4.2). Sehingga diperoleh persamaan baru sebagai berikut

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t) \tag{4.17}$$

dengan T^{-1} merupakan invers dari matriks transformasi T dan $x(t)$ merupakan penyelesaian diferensial sistem awal. Dalam identifikasi sistem, sistem setimbang $\tilde{x}(t)$ akan digunakan sebagai kondisi awal dalam penyelesaian diferensial sistem tereduksi.

(iii). Mendapatkan Penyelesaian Sistem Tereduksi

Dari sistem yang sudah setimbang akan dibentuk sistem tereduksi. Sistem tereduksi dibentuk dari penyelesaian sistem berikut.

$$\dot{\widetilde{\mathrm{x}_\mathrm{r}}} = \widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{r}} \,.\, \widetilde{\mathrm{x}_\mathrm{r}}(t) \tag{4.18}$$

Untuk memperoleh penyelesaian persamaan (4.18) digunakan cara yang sama seperti penyelesaian sistem awal (4.16). Dimana $\widetilde{\mathrm{A}_\mathrm{r}}$ merupakan matriks A yang sudah setimbang dan tereduksi sedangkan $\widetilde{\mathrm{x}_\mathrm{r}}(t)$ merupakan penyelesaian sistem setimbang yang tereduksi. Penyelesaian sistem tereduksi tentunya memiliki dimensi yang lebih kecil dibandingkan sistem awal karena ada pemotongan variabel keadaan yang pengaruhnya kecil terhadap sistem.

(iv). Identifikasi Sistem

Berdasarkan (i), penyelesaian sistem awal $x(t)$ menghasilkan matriks berukuran $n \times 1$. Untuk (ii), sistem setimbang $\tilde{x}(t)$ menghasilkan matriks berukuran $n \times 1$. Untuk (iii), penyelesaian sistem tereduksi $\widetilde{\mathrm{x}_\mathrm{r}}(t)$ menghasilkan matriks berukuran $r \times 1$. Karena terdapat perbedaan ukuran matriks sistem awal dan sistem tereduksi, maka hasil penyelesaiaannya tidak dapat dibandingkan secara langsung. Agar menghasilkan sistem tereduksi yang bersesuaian dengan sistem awal maka perlu adanya identifikasi agar kedua sistem bersesuaian.

Identifikasi sistem dapat diperoleh dengan membentuk ulang persamaan berikut

$$x(t) = T\tilde{x}(t)$$

dimana

$$x_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}$$

$$T_{n\times n} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} \\ \tilde{x}_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n1} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari identifikasi sistem tereduksi maka perkalian matriks T dan $\tilde{x}(t)$ harus menghasilkan matriks berukuran $n \times 1$ seperti sistem awal. Matriks $\tilde{x}(t)$ yang semula berukuran $n \times 1$ akan direduksi sebesar r baris pertama sehingga menjadi

$$\tilde{\mathrm{x}}_r = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} \\ \tilde{x}_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{x}_{r1} \end{bmatrix}$$

Ingat. Kolom ke i dari matriks transformasi T bersesuaian dengan variabel $\tilde{x}_i$. Ketika variabel $\tilde{x}_{r+1}, \dots, \tilde{x}_n$ dihapus, maka kolom ke $r+1, \dots, n$ dari matriks transformasi T juga dihapus. Sehingga

$$T_r = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1r} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & \cdots & t_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & \cdots & t_{nr} \end{bmatrix}$$

Dari pembentukan matriks baru di atas dapat dilihat bahwa $\tilde{x}_r$ memiliki ukuran $r \times 1$ matriks dan T_r memiliki ukuran matriks $n \times r$ sehingga perkalian matriksnya akan menghasilkan matriks baru yang berukuran $n \times 1$.

Atau dapat ditulis kembali menjadi persamaan baru

$$x_{id} = T_r \,.\, \tilde{x}_r \tag{4.19}$$

Dimana x_{id} dimisalkan sebagai hasil identifikasi sistem tereduksi yang berukuran $nx1$. T_r adalah r kolom pertama dari invers matriks transformasi T yang nantinya berukuran nxr. Sedangkan matriks $\tilde{x}_r$ adalah penyelesaian sistem tereduksi berukuran $rx1$.

4.3 Simulasi

Pada subbab ini akan membahas bagaimana simulasi dari reduksi model, mulai dari pembentukan matriks (A, B, C, D) untuk sistem awal, konstruksi matriks transformasi T, pembentukan sistem setimbang, pemotongan sistem sehingga didapat model tereduksi dan identifikasi sistemnya.

Metode yang digunakan dalam reduksi model ini adalah metode Pemotongan Setimbang. Metode ini adalah metode yang paling sederhana namun dapat mempertahankan sifat – sifat sistem awal.

4.3.1 Konstruksi Sistem Awal

Mulanya dikonstruksi matriks simetri $A, B, C,$ dan D dengan ukuran masing-masing 9x9, 9x1, 1x9 dan 1x1 secara berturut-turut bersifat stabil, terkendali dan teramati.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks A yang dapat dilihat pada Tabel 4.1

Tabel 4.1. Nilai Eigen Matriks A

i	λ_i
1	-2.3247
2	$-0.3376 + 0.5623i$
3	$-0.3376 - 0.5623i$
4	-2.1673
5	$-1.1812 + 1.0840i$
6	$-1.1812 - 1.0840i$
7	$-0.2351 + 0.3525i$
8	$-0.2351 - 0.3525i$
9	-1

Karena $Re(\lambda_i) < 0$ maka sistem (A, B, C, D) stabil asimtotik.

Matriks keterkendalian (M_c) sistem (A, B, C, D) yaitu

$$M_c = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 13 & -32 & 82 & -206 & 509 & -1249 & 3055 \\ -2 & 1 & 1 & -6 & 16 & -32 & 55 & -92 & 172 \\ 1 & -3 & 5 & -6 & 7 & -14 & 43 & -126 & 318 \\ -1 & 0 & 6 & -19 & 51 & -133 & 339 & -848 & 2097 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 6 & -22 & 54 & -109 & 201 \\ 1 & -2 & 5 & -10 & 16 & -23 & 37 & -80 & 206 \\ 1 & -1 & 7 & -26 & 77 & -210 & 549 & -1397 & 3494 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 7 & -29 & 83 & -192 & 393 \\ 1 & -3 & 8 & -18 & 34 & -57 & 94 & -174 & 380 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan matriks keterendalian di atas, diperoleh rank $M_c = 9$. Karena dimensi rank matriks keterkendalian = rank dimensi matriks A, maka sistem (A, B, C, D) terkendali.

Matriks keteramatan (M_o) sistem (A, B, C, D) yaitu

$$(M_o) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ -6 & -6 & -5 & -5 & -6 & -4 & -4 & -4 & -2 \\ 15 & 16 & 17 & 9 & 16 & 12 & 10 & 9 & 8 \\ -34 & -41 & -52 & -19 & -40 & -36 & -25 & -26 & -23 \\ 78 & 107 & 145 & 44 & 100 & 100 & 59 & 78 & 57 \\ -181 & -285 & -380 & -103 & -256 & -264 & -137 & -223 & -135 \\ 421 & 764 & 960 & 240 & 660 & 684 & 318 & 603 & 316 \\ -979 & -2027 & -2381 & -558 & -1684 & -1764 & -739 & -1563 & -737 \\ 2276 & 5274 & 5861 & 1297 & 4226 & 4528 & 1718 & 3944 & 1716 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan matriks keterendalian di atas, diperoleh rank $M_o = 9$. Karena dimensi rank matriks keterkendalian = rank dimensi matriks A, maka sistem (A, B, C, D) teramati.

Setelah matriks keterkendalian dan matriks keteramatan didapat, akan dicari nilai gramian keterkendalian dan gramian ketaramatan yang nantinya akan digunakan untuk mengkonstruksikan matriks transformasi T. Gramian dicari berdasarkan teorema 2.1 (i) dan 2.2 (i), sehingga diperoleh nilai gramian keterkendalian dan keteramatan sebagai berikut:

Gramian Keterkendalian

$$W = \begin{bmatrix} 11.55 & 3.6 & 0.12 & -8.32 & -6.52 & -1.11 & -5.21 & 0.62 & 0.56 \\ 3.6 & 3.33 & -0.004 & -0.68 & -4.48 & -1.33 & -3.15 & -1.86 & -0.45 \\ 0.12 & -0.004 & 0.49 & 0.58 & 0.043 & -0.16 & -0.41 & 0.02 & 0.034 \\ -8.32 & -0.68 & 0.58 & 8.82 & 2.60 & -0.24 & 1.87 & -2.27 & -0.95 \\ -6.52 & -4.48 & 0.042 & 2.60 & 6.48 & 1.64 & 4.53 & 1.92 & 0.39 \\ -1.11 & -1.33 & -0.16 & -0.24 & 1.64 & 0.66 & 1.38 & 0.83 & 0.23 \\ -5.21 & -3.15 & -0.41 & 1.86 & 4.53 & 1.38 & 3.87 & 1.13 & 0.21 \\ 0.62 & -1.84 & 0.02 & -2.27 & 1.92 & 0.83 & 1.13 & 1.92 & 0.61 \\ 0.56 & -0.45 & 0.03 & -0.95 & 0.38 & 0.23 & 0.21 & 0.61 & 0.23 \end{bmatrix}$$

Gramian Keteramatan

$$M = \begin{bmatrix} 1.60 & 1.63 & 0.36 & 1.10 & -0.45 & -0.67 & -2.20 & -1.18 & -1.34 \\ 1.63 & 2.59 & 1.27 & 2.21 & 0.01 & -1.14 & -2.85 & -2.10 & -1.86 \\ 0.356 & 1.27 & 1.31 & 1.47 & 1.16 & -0.57 & -0.78 & -1.33 & -0.60 \\ 1.10 & 2.21 & 1.47 & 2.90 & 0.9 & -0.08 & -0.90 & -0.47 & -1.19 \\ -0.45 & 0.009 & 1.16 & 0.9 & 2.35 & 0.41 & 1.58 & 0.1 & 0.7 \\ -0.67 & -1.14 & -0.57 & -0.08 & 0.41 & 1.8 & 3.12 & 3.14 & 1.34 \\ -2.20 & -2.85 & -0.78 & -0.90 & 1.58 & 3.12 & 6.70 & 5.48 & 3.27 \\ -1.18 & -2.10 & -1.33 & -0.47 & 0.1 & 3.14 & 5.48 & 5.83 & 2.39 \\ -1.34 & -1.86 & -0.60 & -1.19 & 0.7 & 1.34 & 3.27 & 2.39 & 1.84 \end{bmatrix}$$

4.3.2 Pembentukan Sistem Setimbang

Sistem setimbang diperoleh dengan mentransformasikan matriks T pada sistem awal yang sudah stabil, terkendali dan teramati. Berdasarkan algortima pembentukan sistem setimbang, diperoleh matriks ϕ , U dan T sebagai berikut

$$\phi = \begin{bmatrix} 3.4 & 1.06 & 0.03 & -2.45 & -1.92 & -0.33 & -1.53 & 0.18 & 0.17 \\ 0 & 1.46 & -0.03 & 1.29 & -1.65 & -0.66 & -1.03 & -1.37 & -0.42 \\ 0 & 0 & 0.69 & 1.01 & 0.09 & -0.23 & -0.56 & -0.03 & 0.025 \\ 0 & 0 & 0 & 0.40 & -0.16 & 0.13 & -0.03 & -0.08 & -0.07 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & -0.16 & -0.28 & 0.003 & -0.045 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.13 & 0.23 & -0.06 & 0.13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0.05 & 0.03 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0.034 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} -0.65 & 0.72 & -0.23 & 0.07 & 0.014 & -0.004 & 0.005 & 0.001 & 0.0001 \\ -0.74 & -0.53 & 0.38 & -0.17 & 0.071 & -0.031 & -0.03 & 0.006 & -0.0004 \\ -0.16 & -0.44 & -0.78 & 0.32 & 0.15 & 0.104 & 0.1 & -0.02 & 0 \\ -0.03 & -0.08 & -0.36 & -0.60 & -0.63 & -0.261 & -0.16 & 0.043 & 0.004 \\ -0.06 & -0.06 & 0.14 & 0.68 & -0.47 & -0.304 & -0.44 & 0.062 & -0.002 \\ 0.06 & 0.015 & -0.09 & -0.1 & 0.53 & -0.808 & -0.19 & 0.1 & -0.009 \\ 0.02 & 0.012 & -0.08 & -0.16 & 0.25 & 0.42 & -0.79 & 0.33 & 0.025 \\ 0.01 & 0.006 & -0.03 & -0.06 & 0.08 & 0.026 & -0.33 & -0.93 & -0.09 \\ 0.0004 & 0.0003 & 0.0006 & 0.001 & 0.007 & -0.015 & -0.014 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 & 0.33 & 0.15 & -0.12 & 0.25 & 0.16 & 0.19 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 & -0.26 & 0.37 & -0.43 & -0.50 & 0.33 & -0.19 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 & 0.34 & 0.30 & 0.61 & 0.96 & -0.51 & 0 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 & -0.42 & -0.15 & -0.25 & -0.2 & -0.02 & 0.22 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 & 0.60 & -0.39 & 0.42 & -0.28 & -0.28 & -0.20 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 & -0.27 & -0.09 & -0.76 & 0.27 & 0.31 & -0.02 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 & -0.46 & 0.34 & -0.69 & -0.09 & 1.078 & 0.18 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 & 0.41 & -0.2 & 1.12 & 0.1 & -0.89 & -0.23 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 & 0.12 & 0.38 & -0.33 & -0.20 & -0.60 & 0.18 \end{bmatrix}$$

Setelah didapat matriks T, transformasikan dengan sistem awal sehingga diperoleh sistem setimbang $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.38 & 0.39 & 0.48 & -0.04 & -0.09 & 0.03 & -0.03 & 0.01 & 0.001 \\ -0.39 & -0.09 & -0.45 & 0.029 & 0.07 & -0.02 & 0.02 & -0.01 & -0.001 \\ 0.48 & 0.45 & -2.87 & 1.12 & 0.89 & -0.34 & 0.3 & -0.13 & -0.01 \\ 0.043 & 0.03 & -1.12 & -0.03 & -0.18 & 0.05 & -0.04 & 0.018 & 0.002 \\ -0.089 & -0.07 & 0.89 & 0.18 & -0.67 & 0.40 & -0.41 & 0.17 & 0.018 \\ 0.03 & 0.02 & -0.34 & -0.05 & 0.40 & -0.59 & 1.56 & -0.47 & -0.05 \\ 0.03 & 0.02 & -0.3 & -0.04 & 0.41 & -1.56 & -1.27 & 0.92 & 0.11 \\ -0.01 & -0.01 & 0.13 & 0.02 & -0.17 & 0.47 & 0.92 & -1.30 & -0.27 \\ -0.001 & -0.0009 & 0.013 & 0.002 & -0.01 & 0.05 & 0.11 & -0.27 & -1.80 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 3.1968 \\ 0.9703 \\ -2.1467 \\ -0.1739 \\ 0.3771 \\ -0.1280 \\ -0.1114 \\ 0.0478 \\ 0.0050 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [3.2 \quad -0.97 \quad -2.15 \quad 0.17 \quad 0.38 \quad -0.13 \quad 0.11 \quad -0.05 \quad -0.005]$$

$$D = 0$$

Akan diselidiki sifat sistem setimbang apakah tetap stabil, terkendali dan teramati. Dapat diperoleh nilai eigen seperti pada Tabel 4.2

Tabel 4.2 Nilai Eigen Matriks $\tilde{A}$

i	λ_i
1	-2.3247
2	$-0.3376 + 0.5623i$
3	$-0.3376 - 0.5623i$
4	-2.1673
5	$-1.1812 + 1.0840i$
6	$-1.1812 - 1.0840i$
7	$-0.2351 + 0.3525i$
8	$-0.2351 - 0.3525i$
9	-1

Dapat dilihat jika hasil nilai eigen masih menujukkan $Re(\lambda_i) < 0$ sehingga sistem setimbang $\left(\tilde{A}\,, \tilde{B}, \tilde{C}, D\right)$ bersifat stabil asimtotik.

Selanjutnya untuk matriks keterkendalian dan keteramatan didapat

$$\widetilde{M_c} = (1.0e + 003)$$

$$\begin{bmatrix} 0.0032 & -0.0019 & 0.0047 & -0.0148 & 0.0416 & -0.1105 & 0.2831 & -0.7058 & 1.7279 \\ 0.0010 & -0.0003 & -0.0031 & 0.0096 & -0.0256 & 0.0664 & -0.1678 & 0.4129 & -1.0017 \\ -0.0021 & 0.0083 & -0.0241 & 0.0664 & -0.1775 & 0.4574 & -1.1417 & 2.7925 & -6.7655 \\ -0.0002 & 0.0025 & -0.0090 & 0.0260 & -0.0722 & 0.1954 & -0.5084 & 1.2760 & -3.1283 \\ 0.0004 & -0.0025 & 0.0094 & -0.0268 & 0.0678 & -0.1646 & 0.3961 & -0.9546 & 2.3075 \\ -0.0001 & 0.0009 & -0.0022 & 0.0004 & 0.0176 & -0.0835 & 0.2660 & -0.7136 & 1.7721 \\ -0.0001 & 0.0013 & -0.0073 & 0.0280 & -0.0855 & 0.2270 & -0.5591 & 1.3375 & -3.1982 \\ 0.0000 & -0.0006 & 0.0040 & -0.0180 & 0.0641 & -0.1945 & 0.5310 & -1.3600 & 3.3733 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0007 & -0.0037 & 0.0161 & -0.0587 & 0.1894 & -0.5584 & 1.5474 \end{bmatrix}$$

Rank matriks Mc = 9 , maka sistem Terkendali

$$\widetilde{M_o} = (1.0e + 003)$$

$$\begin{bmatrix} -0.0032 & -0.0010 & -0.0021 & 0.0002 & 0.0004 & -0.0001 & 0.0001 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0019 & 0.0003 & 0.0083 & -0.0025 & -0.0025 & 0.0009 & -0.0013 & 0.0006 & 0.0001 \\ 0.0047 & 0.0031 & -0.0241 & 0.0090 & 0.0094 & -0.0022 & 0.0073 & -0.0040 & -0.0007 \\ -0.0148 & -0.0096 & 0.0664 & -0.0260 & -0.0268 & 0.0004 & -0.0280 & 0.0180 & 0.0037 \\ 0.0416 & 0.0256 & -0.1775 & 0.0722 & 0.0678 & 0.0176 & 0.0855 & -0.0641 & -0.0161 \\ -0.1105 & -0.0664 & 0.4574 & -0.1954 & -0.1646 & -0.0835 & -0.2270 & 0.1945 & 0.0587 \\ 0.2831 & 0.1678 & -1.1417 & 0.5084 & 0.3961 & 0.2660 & 0.5591 & -0.5310 & -0.1894 \\ -0.7058 & -0.4129 & 2.7925 & -1.2760 & -0.9546 & -0.7136 & -1.3375 & 1.3600 & 0.5584 \\ 1.7279 & 1.0017 & -6.7655 & 3.1283 & 2.3075 & 1.7721 & 3.1982 & -3.3733 & -1.5474 \end{bmatrix}$$

Rank matriks Mo = 9 , maka sistem Teramati

Untuk gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem setimbang harus bernilai sama sehingga diperoleh

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} 13.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.014 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 13.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.47 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.014 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena $\widetilde{W} = \widetilde{M}$, maka sistem $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D)$ telah memenuhi syarat sistem setimbang.

4.3.3 Identifikasi Sistem

(i). Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal

$$\dot{x} = Ax(t)$$

Dengan matriks A dan nilai eigen matriks A sesuai tabel 4.1 dan kondisi awal sebagai berikut :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial sistem awal untuk $t = (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan dalam Tabel 4.3

Tabel 4.3 Penyelesaian Persamaan Differensial Sistem Awal Terhadap Waktu

x	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-1,081	-0,556	-0,113	0,134	0,227	0,221	0,166	0,101
2	2	-0,028	-0,381	0,08	0,115	0,108	0,088	0,064	0,041
3	2	0,682	0,28	0,132	0,089	0,065	0,039	0,016	-0,001
4	1	0,866	0,818	0,479	0,147	-0,071	-0,171	-0,184	-0,148
5	1	0,07	0,072	0,003	-0,066	-0,096	-0,097	-0,083	-0,062
6	3	0,43	-0,101	-0,153	-0,122	-0,092	-0,066	-0,04	-0,019
7	2	0,734	0,214	-0,14	-0,257	-0,226	-0,141	-0,056	0,003
8	1	-0,086	-0,031	-0,058	-0,63	-0,04	-0,014	0,004	0,014
9	1	-0,701	-0,552	-0,223	-0,061	-0,004	0,015	0,021	0,021

(ii). Mendapatkan Sistem Setimbang

$$\tilde{x}(t) = T^{-1}x(t)$$

dengan

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.26 & -0.32 & -0.06 & -0.11 & 0.21 & 0.30 & 0.69 & 0.50 & 0.35 \\ -0.01 & -0.38 & -0.45 & -0.58 & -0.46 & 0.1 & 0.1 & 0.30 & 0.16 \\ -0.90 & -0.67 & -0.16 & -0.95 & -0.33 & -0.59 & -0.38 & -0.95 & 0.13 \\ 0.08 & -0.21 & 0.43 & -0.66 & 1.2 & -0.69 & -0.47 & -1.59 & 0.19 \\ -0.13 & 0.78 & 0.72 & -0.17 & 0.01 & -0.46 & 0.71 & 0.15 & 0.61 \\ 0.05 & -0.1 & -0.02 & 0.14 & -0.32 & -0.8 & 0.43 & 0.61 & -0.43 \\ -0.38 & -0.49 & 0.58 & -0.44 & -0.29 & 0.38 & -0.27 & -0.51 & -0.24 \\ 0.47 & 0.24 & 0.13 & 0.13 & 0.36 & -0.29 & 0.54 & -0.11 & -0.71 \\ 0.39 & -1.97 & -0.60 & 0.22 & -0.66 & -1.54 & 0.27 & -0.78 & 0.65 \end{bmatrix}$$

diperoleh nilai $\tilde{x}$ untuk $t = (0,8)$ seperti pada Tabel 4.4

Tabel 4.4 Penyelesaian Sistem Setimbang Terhadap Waktu

$\tilde{x}$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.559	0,52	-0,025	-0,305	-0,374	-0,316	-0,209	-0,104	-0,025
2	-1,566	-0,84	-0,7	-0,447	-0,207	-0,034	0,065	0,103	0,102
3	7,054	-0,502	-0,378	-0,26	-0,011	-0,011	0,037	0,05	0,042
4	-3,165	-0,902	-0,444	-0,056	0,14	0,186	0,148	0,08	0,014
5	4,122	0,346	-0,033	-0,081	-0,061	-0,013	0,035	0,063	0,07
6	-2,145	0,253	0,456	0,172	0,011	-0,025	-0,014	0,005	0,017
7	-1,309	0,596	0,063	-0,067	-0,03	0,006	0,016	0,012	0,004
8	0,387	0,479	0,432	0,176	0,044	0,01	0,008	0,009	0,007
9	-8,768	-1,488	-0,288	-0,078	-0,024	-0,007	-0,002	-0,001	-0,001

(iii). Mendapatkan Identifikasi Sistem

Setelah sistem setimbang didapat, akan dilakukan pemotongan variabel agar sistem tereduksi. Pemotongan sitem dapat dilihat dari loncatan Nilai Singular Hankel yang paling besar. Cara menghitung Nilai Singular Hankel adalah sebagai berikut

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$$

Untuk
$i = 1,2,3,\ldots,n$
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n > 0$
$\lambda_i(WM) = nilai\ eigen\ gramian\ W * M$

Hasil perhitungan Nilai Singular Hankel pada sistem ini ditunjukkan pada Tabel 4.5

Tabel 4.5 Nilai Singular Hankel Sistem $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$

i	σ_i
1	13.4583
2	5.4063
3	0.8030
4	0.4696
5	0.1064
6	0.0140
7	0.0049
8	0.0009
9	0.0000

Berdasarkan tabel di atas, identifikasi sistem tereduksi dapat dibagi ke dalam beberapa kasus. Bergantung pada berapa orde yang tereduksi.

a. Kasus 1

Pada kasus 1, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 8. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \widetilde{A_r} \, . \, \tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{A_r} = \begin{bmatrix} -0.38 & 0.39 & 0.48 & -0.04 & -0.09 & 0.03 & -0.03 & 0.01 \\ -0.39 & -0.09 & -0.45 & 0.03 & 0.07 & -0.023 & 0.02 & -0.009 \\ 0.48 & 0.45 & -2.87 & 1.12 & 0.89 & -0.34 & 0.3 & -0.13 \\ 0.04 & 0.03 & -1.12 & -0.03 & -0.18 & 0.049 & -0.04 & 0.018 \\ -0.09 & -0.07 & 0.89 & 0.18 & -0.67 & 0.40 & -0.41 & 0.17 \\ 0.03 & 0.02 & -0.34 & -0.05 & 0.40 & -0.59 & 1.56 & -0.47 \\ 0.03 & 0.02 & -0.3 & -0.04 & 0.41 & -1.56 & -1.27 & 0.94 \\ -0.01 & -0.01 & 0.13 & 0.02 & -0.17 & 0.47 & 0.94 & -1.20 \end{bmatrix}$$

Dengan kondisi awal

$$\tilde{x}_r^8(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \\ -7.0543 \\ -3.1652 \\ 4.1223 \\ -2.1451 \\ -1.3088 \\ 0.3865 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $t = (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.6

Tabel 4.6 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 8

$\tilde{x}_r^8$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	0,5213	-0,0258	-0,3051	-0,3729	-0,3157	-0,21	-0,1047	-0,0244
2	-1,5655	-0,8402	-0,6953	-0,447	-0,2091	-0,0354	0,0652	0,1044	0,1027
3	-7,0543	-0,5015	-0,3808	-0,2512	-0,1093	-0,0181	0,0309	0,0486	0,0444
4	-3,1652	-0,9042	-0,4379	-0,0623	0,1283	0,1811	0,1555	0,0947	0,0304
5	4,1223	0,3356	-0,0191	-0,0827	-0,0874	-0,05	0,0005	0,0386	0,0544
6	-2,1451	0,3457	0,4206	0,0709	-0,0593	-0,0612	-0,034	-0,0086	0,0084
7	-1,3088	0,5309	-0,1257	-0,1568	-0,0529	0,0025	0,0176	0,0159	0,0086
8	0,3865	0,0066	0,1299	-0,0171	-0,057	-0,0331	-0,0077	0,0045	0,0069

dengan

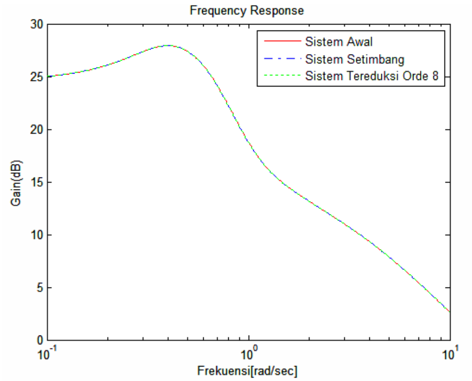
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 & 0.33 & 0.15 & -0.12 & 0.25 & 0.16 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 & -0.26 & 0.37 & -0.43 & -0.50 & 0.33 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 & 0.34 & 0.30 & 0.61 & 0.96 & -0.51 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 & -0.42 & -0.15 & -0.25 & -0.2 & -0.02 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 & 0.60 & -0.39 & 0.42 & -0.28 & -0.28 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 & -0.27 & -0.09 & -0.76 & 0.27 & 0.31 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 & -0.46 & 0.34 & -0.69 & -0.09 & 1.078 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 & 0.41 & -0.2 & 1.12 & 0.1 & -0.89 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 & 0.12 & 0.38 & -0.33 & -0.20 & -0.60 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 8 yang ditampilkan dalam Tabel 4.7

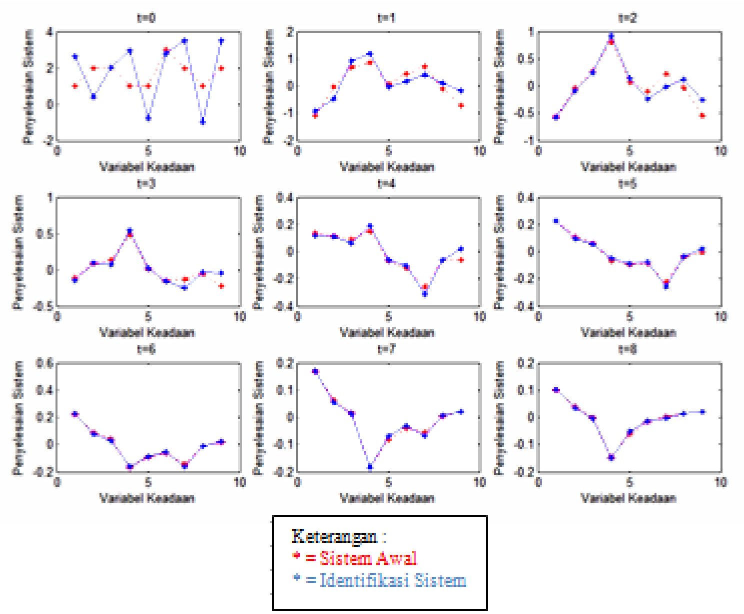
Tabel 4.7 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 8

x_{id}^{8}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,6398	-0,907	-0,584	-0,147	0,1142	0,2223	0,2251	0,172	0,1038
2	0,3688	-0,472	-0,079	0,0935	0,1119	0,0951	0,0746	0,0534	0,033
3	2,0003	0,9115	0,2393	0,075	0,0629	0,0528	0,0321	0,0121	-0,002
4	2,9406	1,1984	0,928	0,545	0,1881	-0,051	-0,165	-0,185	-0,152
5	-0,788	-0,043	0,1328	0,0198	-0,062	-0,087	-0,084	-0,07	-0,052
6	2,7927	0,1625	-0,235	-0,162	-0,101	-0,074	-0,053	-0,032	-0,014
7	3,5321	0,4256	-0,019	-0,253	-0,314	-0,259	-0,162	-0,069	-0,002
8	-1,024	0,0913	0,1146	-0,032	-0,06	-0,035	-0,01	0,0053	0,0135
9	3,5328	-0,177	-0,263	-0,044	0,0197	0,0224	0,0207	0,0206	0,019

Pada Gambar 4.1, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 8 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang sama. Sedangkan pada Gambar 4.2, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 8 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa semakin lama performasi sistem teridentifikasi semakin mendekati sistem awalnya.



Gambar 4.1 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 8



Gambar 4.2 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 8

b. Kasus 2

Pada kasus 2, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 7. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \widetilde{A_r} \,.\, \tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{A_r} = \begin{bmatrix} -0.3797 & 0.3852 & 0.4812 & -0.0428 & -0.0889 & 0.0304 & -0.0265 \\ -0.3852 & -0.0871 & -0.4525 & 0.0287 & 0.0690 & -0.0230 & 0.0200 \\ 0.4812 & 0.4525 & -2.8696 & 1.1197 & 0.8903 & -0.3363 & 0.2996 \\ 0.0428 & 0.0287 & -1.1197 & -0.0322 & -0.1805 & 0.0488 & -0.0408 \\ -0.0889 & -0.0690 & 0.8903 & 0.1805 & -0.6683 & 0.4009 & -0.4136 \\ 0.0304 & 0.0230 & -0.3363 & -0.0488 & 0.4009 & -0.5853 & 1.5637 \\ 0.0265 & 0.0200 & -0.2996 & -0.0408 & 0.4136 & -1.5637 & -1.2710 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_r^7(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \\ -7.0543 \\ -3.1652 \\ 4.1223 \\ -2.1451 \\ -1.3088 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $= (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.9.

Tabel 4.8 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 7

$\tilde{x}_r^7$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	0,5209	-0,0254	-0,3056	-0,3725	-0,3154	-0,2106	-0,105	-0,0242
2	-1,5655	-0,8398	-0,6957	-0,4464	-0,2094	-0,0361	0,0656	0,1053	0,1031
3	-7,0543	-0,4977	-0,3849	-0,2488	-0,1062	-0,0213	0,0283	0,0494	0,0463
4	-3,1652	-0,9041	-0,4375	-0,0601	0,1239	0,1779	0,1577	0,0979	0,0311
5	4,1223	0,3343	-0,0173	-0,0741	-0,0909	-0,0558	0,0007	0,0427	0,0586
6	-2,1451	0,3606	0,4477	0,029	-0,0717	-0,0406	-0,0185	-0,0057	0,0067
7	-1,3088	0,6077	-0,2108	-0,1788	-0,0075	0,0276	0,0162	0,0093	0,0044

dengan

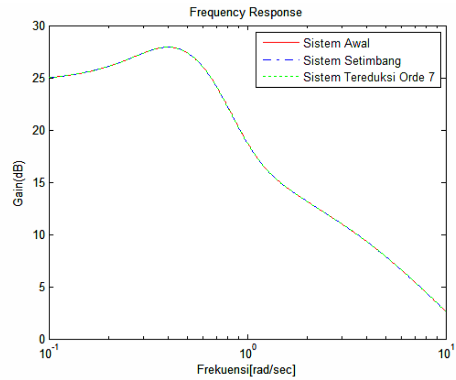
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 & 0.33 & 0.15 & -0.12 & 0.25 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 & -0.26 & 0.37 & -0.43 & -0.50 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 & 0.34 & 0.30 & 0.61 & 0.96 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 & -0.42 & -0.15 & -0.25 & -0.2 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 & 0.60 & -0.39 & 0.42 & -0.28 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 & -0.27 & -0.09 & -0.76 & 0.27 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 & -0.46 & 0.34 & -0.69 & -0.09 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 & 0.41 & -0.2 & 1.12 & 0.1 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 & 0.12 & 0.38 & -0.33 & -0.20 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 7 yang ditampilkan dalam Tabel 4.9.

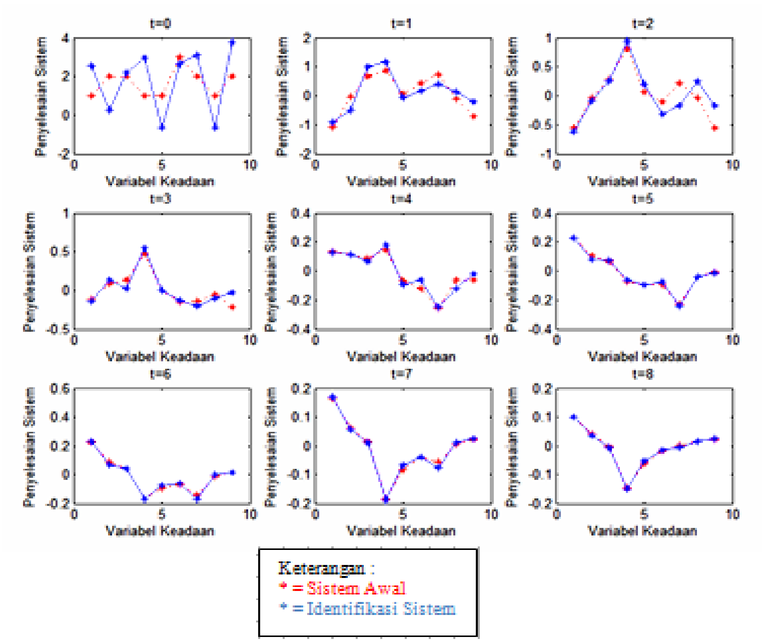
Tabel 4.9 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 7

x^7_{id}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5797	-0,893	-0,625	-0,144	0,1304	0,2313	0,228	0,1714	0,1013
2	0,2406	-0,518	-0,092	0,1318	0,1139	0,0821	0,0701	0,0552	0,0354
3	2,1964	0,9948	0,2437	0,0214	0,0654	0,0718	0,0388	0,0115	-0,004
4	2,9485	1,1797	0,9403	0,5567	0,1843	-0,059	-0,171	-0,188	-0,152
5	-0,681	-0,057	0,2041	0,0008	-0,097	-0,093	-0,078	-0,066	-0,051
6	2,6731	0,1696	-0,318	-0,132	-0,06	-0,071	-0,063	-0,039	-0,017
7	3,1158	0,402	-0,171	-0,201	-0,246	-0,242	-0,166	-0,075	-0,006
8	-0,679	0,1199	0,2545	-0,098	-0,123	-0,038	0,0025	0,0123	0,0159
9	3,7665	-0,195	-0,174	-0,033	-0,023	-0,011	0,0123	0,0256	0,0258

Pada Gambar 4.3, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 7 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang sama. Sedangkan pada Gambar 4.4, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 7 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0{,}8)$. Terlihat bahwa semakin lama performasi sistem teridentifikasi semakin mendekati sistem awalnya.



Gambar 4.3 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 7



Gambar 4.4 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 7

c. Kasus 3

Pada kasus 3, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 6. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \widetilde{A_r}\,.\,\tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{\mathrm{A_r}} = \begin{bmatrix} -0.3797 & 0.3852 & 0.4812 & -0.0428 & -0.0889 & 0.0304 \\ -0.3852 & -0.0871 & -0.4525 & 0.0287 & 0.0690 & -0.0230 \\ 0.4812 & 0.4525 & -2.8696 & 1.1197 & 0.8903 & -0.3363 \\ 0.0428 & 0.0287 & -1.1197 & -0.0322 & -0.1805 & 0.0488 \\ -0.0889 & -0.0690 & 0.8903 & 0.1805 & -0.6683 & 0.4009 \\ 0.0304 & 0.0230 & -0.3363 & -0.0488 & 0.4009 & -0.5853 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{x}}_{\mathrm{r}}^{6}(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \\ -7.0543 \\ -3.1652 \\ 4.1223 \\ -2.1451 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $= (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.10

Tabel 4.10 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 6

$\tilde{x}_r^6$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	0,5181	-0,023	-0,301	-0,378	-0,321	-0,208	-0,097	-0,017
2	-1,566	-0,837	-0,697	-0,455	-0,207	-0,026	0,071	0,1004	0,0899
3	-7,054	-0,505	-0,337	-0,28	-0,15	-0,026	0,0478	0,0702	0,0585
4	-3,165	-0,884	-0,486	-0,112	0,1478	0,2453	0,2179	0,1321	0,0435
5	4,1223	0,4232	-0,09	-0,233	-0,208	-0,112	-0,017	0,0426	0,0608
6	-2,145	-0,197	0,0254	0,0332	-0,013	-0,053	-0,066	-0,055	-0,033

dengan

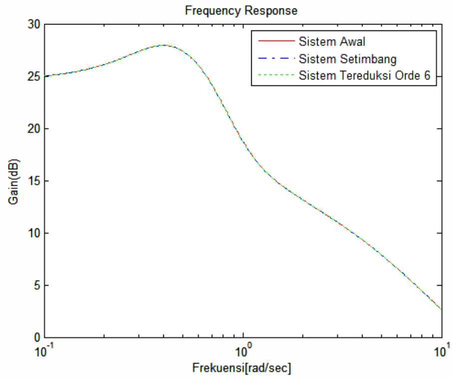
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 & 0.33 & 0.15 & -0.12 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 & -0.26 & 0.37 & -0.43 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 & 0.34 & 0.30 & 0.61 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 & -0.42 & -0.15 & -0.25 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 & 0.60 & -0.39 & 0.42 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 & -0.27 & -0.09 & -0.76 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 & -0.46 & 0.34 & -0.69 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 & 0.41 & -0.2 & 1.12 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 & 0.12 & 0.38 & -0.33 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 6 yang ditampilkan dalam Tabel 4.11

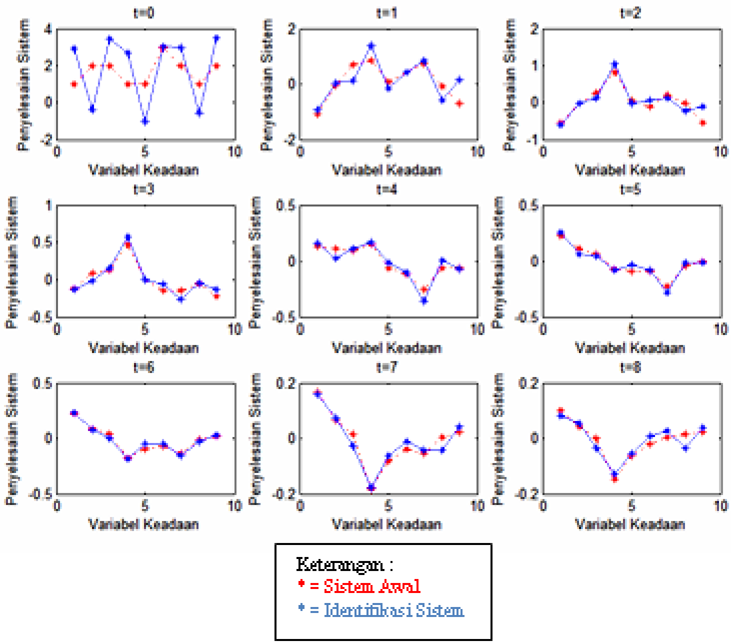
Tabel 4.11 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 6

x_{id}^{6}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,9008	-0,947	-0,597	-0,126	0,1595	0,2577	0,2333	0,1574	0,0801
2	-0,419	0,0524	-0,016	-0,018	0,0229	0,0636	0,0817	0,0751	0,053
3	3,4492	0,1091	0,1169	0,1493	0,1083	0,0458	-0,004	-0,029	-0,034
4	2,6901	1,4122	1,0444	0,5747	0,1675	-0,084	-0,183	-0,178	-0,127
5	-1,041	-0,144	-0,038	-0,006	-0,011	-0,033	-0,053	-0,06	-0,054
6	3,0261	0,4163	0,0762	-0,057	-0,097	-0,082	-0,047	-0,013	0,0083
7	2,9948	0,8561	0,118	-0,26	-0,358	-0,287	-0,158	-0,043	0,0269
8	-0,548	-0,572	-0,232	-0,05	0,0009	-0,01	-0,033	-0,042	-0,035
9	3,5003	0,1486	-0,124	-0,132	-0,075	-0,013	0,0279	0,0424	0,0376

Pada Gambar 4.5, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 6 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang masih sama. Sedangkan pada Gambar 4.6, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 6 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa identifikasi sistem tereduksi orde 6 mulai mendekati sistem awal.



Gambar 4.5 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 6



Gambar 4.6 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 6

d. Kasus 4

Pada kasus 4, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 4. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}}_r(t) = \widetilde{A_r} \, . \tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{\mathrm{A_r}} = \begin{bmatrix} -0.3797 & 0.3852 & 0.4812 & -0.0428 \\ -0.3852 & -0.0871 & -0.4525 & 0.0287 \\ 0.4812 & 0.4525 & -2.8696 & 1.1197 \\ 0.0428 & 0.0287 & -1.1197 & -0.0322 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathrm{x}}_{\mathrm{r}}^{4}(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \\ -7.0543 \\ -3.1652 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $= (0{,}8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.12

Tabel 4.12 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 4

$\tilde{x}_r^4$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	0,4871	0,0027	-0,231	-0,331	-0,332	-0,271	-0,185	-0,101
2	-1,566	-0,785	-0,687	-0,546	-0,363	-0,189	-0,055	0,0302	0,0699
3	-7,054	-0,613	-0,098	-0,065	-0,045	-0,016	0,0097	0,0268	0,0336
4	-3,165	-0,161	0,109	0,1663	0,1975	0,2031	0,1834	0,1466	0,1033

dengan

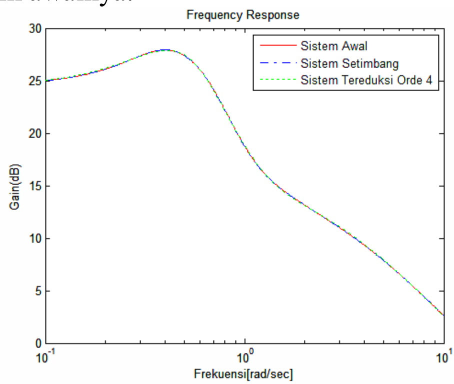
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 & 0.33 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 & -0.26 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 & 0.34 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 & -0.42 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 & 0.60 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 & -0.27 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 & -0.46 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 & 0.41 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 & 0.12 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 4 yang ditampilkan dalam Tabel 4.13

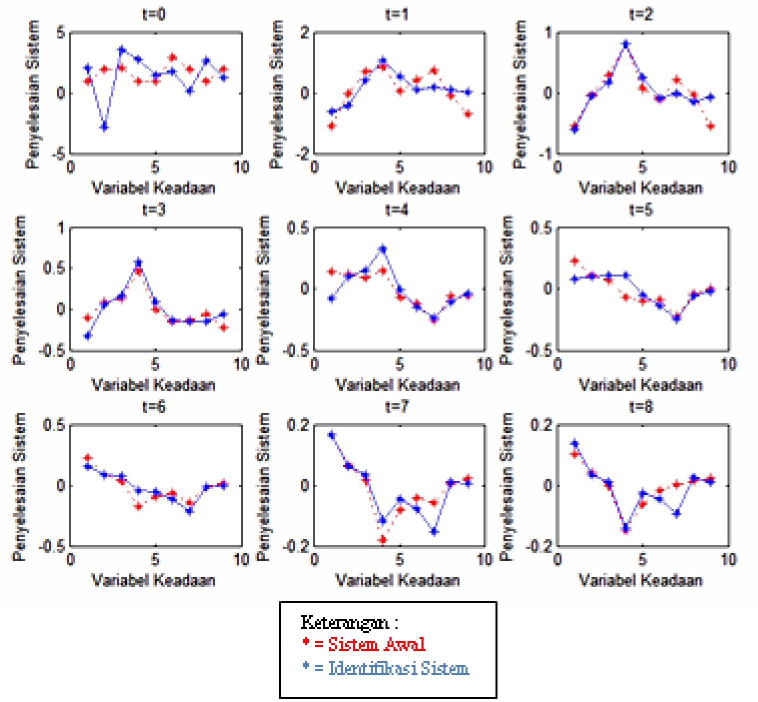
Tabel 4.13 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 4

x_{id}^{4}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,0359	-0,629	-0,603	-0,325	-0,08	0,0801	0,1561	0,167	0,1382
2	-2,858	-0,401	-0,058	0,0507	0,0965	0,1037	0,0874	0,0605	0,033
3	3,5037	0,4081	0,1767	0,1662	0,1464	0,1106	0,0704	0,0349	0,0088
4	2,7855	1,0412	0,8045	0,5773	0,3253	0,1081	-0,042	-0,12	-0,14
5	1,4384	0,.5241	0,2483	0,0876	-0,007	-0,05	-0,058	-0,047	-0,028
6	1,7673	0,1163	-0,085	-0,138	-0,151	-0,139	-0,111	-0,077	-0,045
7	0,1161	0,175	-0,002	-0,152	-0,233	-0,246	-0,213	-0,156	-0,095
8	2,686	0,1007	-0,158	-0,157	-0,112	-0,06	-0,017	0,011	0,025
9	1,2215	0,0393	-0,065	-0,059	-0,039	-0,019	-0,005	0,0046	0,0086

Pada Gambar 4.7, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 4 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang masih sama. Sedangkan pada Gambar 4.8, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 4 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0{,}8)$. Terlihat bahwa semakin lama performasi sistem teridentifikasi mulai mendekati sistem awalnya.



Gambar 4.7 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 4



Gambar 4.8 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 4

e. Kasus 5

Pada kasus 5, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 3. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}_r}(t) = \widetilde{A_r} \, . \tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{\mathrm{A_r}} = \begin{bmatrix} -0.3797 & 0.3852 & 0.4812 \\ -0.3852 & -0.0871 & -0.4525 \\ 0.4812 & 0.4525 & -2.8696 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_r^3(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \\ -7.0543 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $t = (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.14

Tabel 4.14 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 3

$\tilde{x}_r^3$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	0,5705	0,0276	-0,285	-0,429	-0,435	-0,35	-0,223	-0,094
2	-1,566	-0,925	-0,863	-0,677	-0,418	-0,164	0,0361	0,1593	0,2073
3	-7,054	-0,404	-0,13	-0,15	-0,145	-0,113	-0,069	-0,026	0,0074

dengan

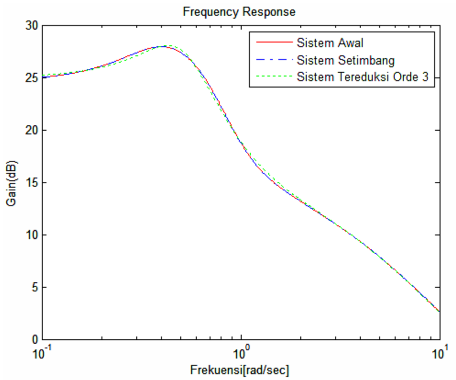
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 & -0.89 \\ -0.49 & -0.01 & 0.35 \\ -0.03 & -0.11 & -0.63 \\ 0.13 & -1.25 & 0.12 \\ 0.67 & -0.24 & -0.18 \\ 0.20 & 0.09 & -0.076 \\ 0.51 & -0.13 & 0.41 \\ 0.24 & 0.38 & -0.56 \\ 0.06 & 0.15 & -0.24 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 3 yang ditampilkan dalam Tabel 4.15

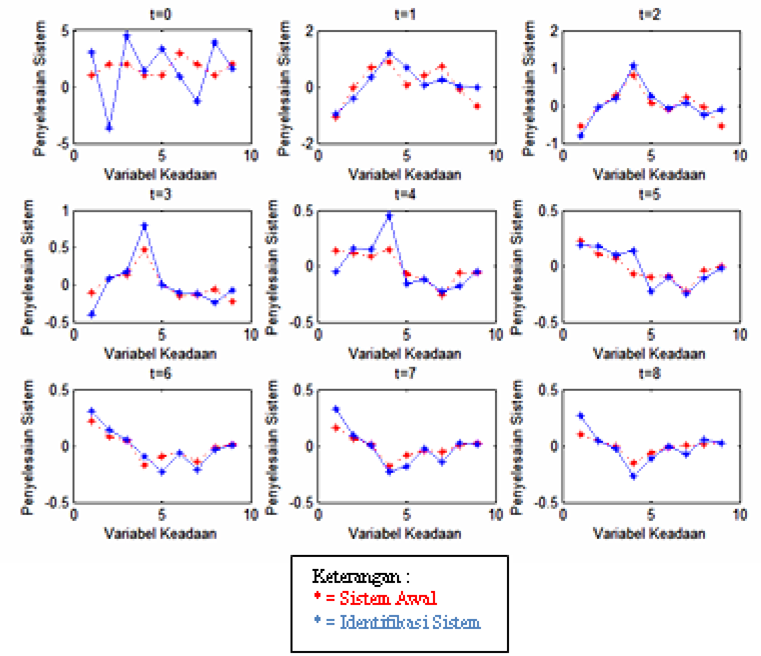
Tabel 4.15 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 3

x_{id}^3	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3,064	-0,96	-0,812	-0,409	-0,054	0,1892	0,3096	0,325	0,2687
2	-3,691	-0,41	-0,051	0,0923	0,1615	0,1734	0,1458	0,0979	0,0466
3	4,5719	0,3426	0,1788	0,1806	0,1527	0,1037	0,0505	0,0054	-0,025
4	1,4484	1,1834	1,071	0,7951	0,4531	0,1371	-0,098	-0,231	-0,271
5	3,3516	0,6718	0,2463	-0,003	-0,16	-0,231	-0,229	-0,182	-0,113
6	0,9115	0,061	-0,065	-0,11	-0,115	-0,095	-0,063	-0,029	-5E-04
7	-1,352	0,2457	0,0715	-0,121	-0,225	-0,247	-0,212	-0,145	-0,072
8	3,9782	0,0173	-0,245	-0,24	-0,181	-0,105	-0,034	0,0199	0,0507
9	1,5955	-0,007	-0,095	-0,081	-0,052	-0,023	0,0013	0,0167	0,0233

Pada Gambar 4.9, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 3 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang mulai berbeda dengan sistem awal. Sedangkan pada Gambar 4.10, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 3 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0{,}8)$. Terlihat bahwa semakin lama performasi sistem teridentifikasi mulai mendekati sistem awalnya.



Gambar 4.9 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 3



Gambar 4.10 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 3

f. Kasus 6

Pada kasus 6, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 2. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan

$$\dot{\tilde{x}_r}(t) = \widetilde{A_r} \,.\, \tilde{x}_r(t)$$

$$\widetilde{A_r} = \begin{bmatrix} -0.3797 & 0.3852 \\ -0.3852 & -0.0871 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_r^2(0) = \begin{bmatrix} 2.5585 \\ -1.5655 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi untuk $= (0,8)$, adalah seperti yang ditampilkan pada Tabel 4.16

Tabel 4.16 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 2

$\tilde{x}_r^2$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,5585	1,141	0,0892	-0,583	-0,921	-1,002	-0,909	-0,721	-0,5
2	-1,566	-2,103	-2,14	-1,858	-1,415	-0,936	-0,501	-0,157	0,0809

Dengan

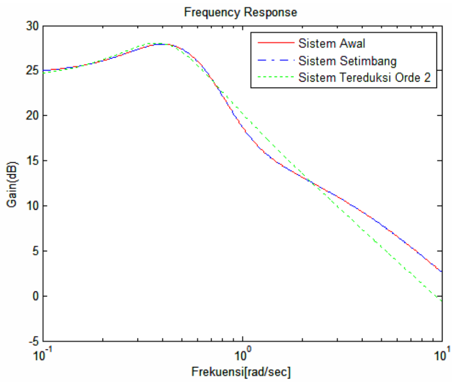
$$Tr = \begin{bmatrix} -0.60 & 1.05 \\ -0.49 & -0.01 \\ -0.03 & -0.11 \\ 0.13 & -1.25 \\ 0.67 & -0.24 \\ 0.20 & 0.09 \\ 0.51 & -0.13 \\ 0.24 & 0.38 \\ 0.06 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Diperoleh identifikasi sistem orde 2 yang ditampilkan dalam Tabel 4.17

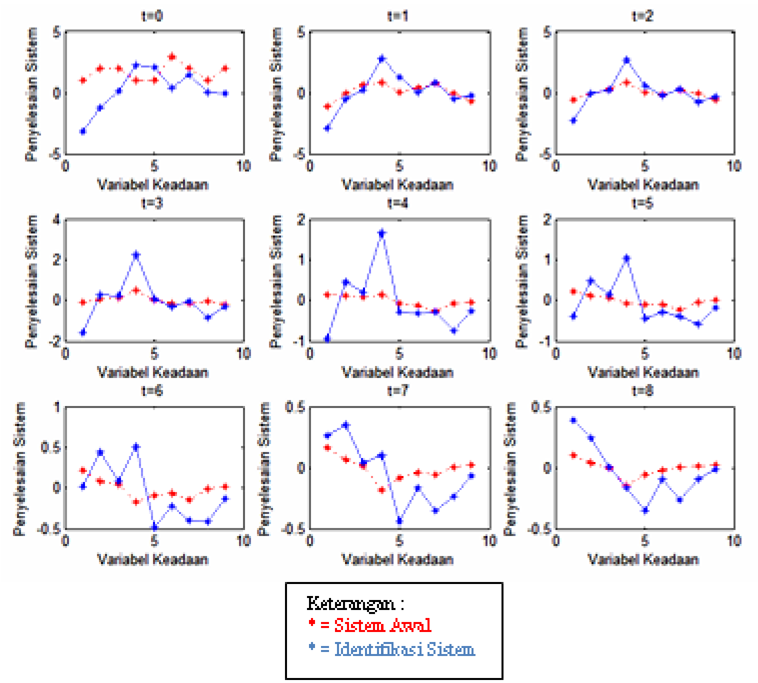
Tabel 4.17 Hasil Identifikasi Sistem Terduksi Orde 2

x_{id}^2	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3,188	-2,903	-2,31	-1,608	-0,938	-0,384	0,0181	0,2678	0,386
2	-1,229	-0,536	-0,024	0,2998	0,4602	0,495	0,4462	0,3518	0,2424
3	0,0969	0,2018	0,2388	0,2278	0,1884	0,1368	0,0849	0,0402	0,0065
4	2,2852	2,7816	2,6955	2,2565	1,659	1,0473	0,5142	0,1065	-0,164
5	2,0738	1,2576	0,5661	0,0517	-0,278	-0,445	-0,487	-0,443	-0,352
6	0,3762	0,0371	-0,181	-0,292	-0,32	-0,291	-0,232	-0,162	-0,095
7	1,507	0,8511	0,3182	-0,061	-0,291	-0,393	-0,401	-0,349	-0,266
8	0,0362	-0,512	-0,783	-0,841	-0,757	-0,596	-0,41	-0,235	-0,092
9	-0,082	-0,244	-0,31	-0,308	-0,262	-0,196	-0,127	-0,065	-0,017

Pada Gambar 4.11, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 2 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang mulai berbeda dengan sistem awal. Sedangkan pada Gambar 4.12, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 2 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa semakin lama performasi sistem teridentifikasi semakin berbeda dari sistem awalnya.

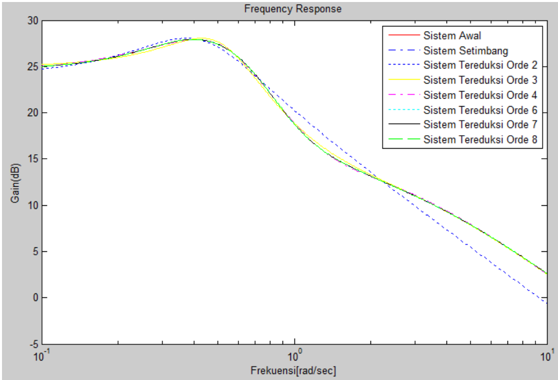


Gambar 4.11 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 2



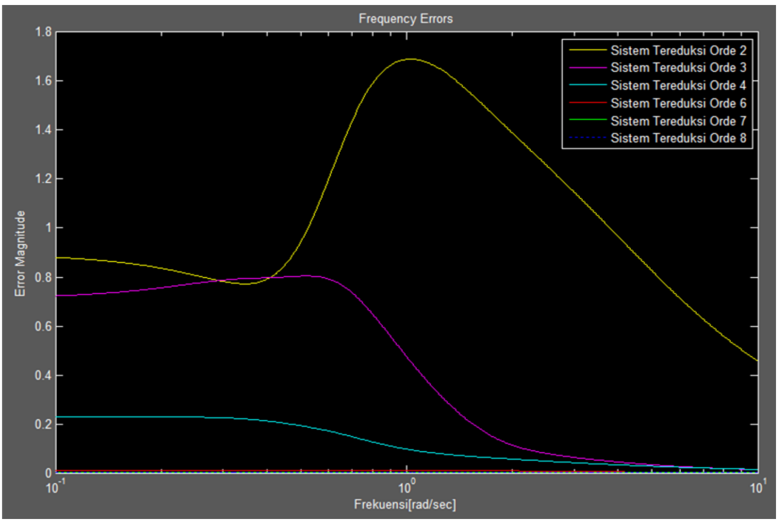
Gambar 4.12 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 2

Berdasarkan kasus – kasus pembentukan sistem di atas, respon frekuensi dapat disusun menjadi satu grafik seperti pada Gambar 4.13 sehingga lebih mudah diamati.



Gambar 4.13 Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Semua Sistem Tereduksi

Setelah mengamati semua performansi sistem yang ada, selanjutnya diperoleh nilai *error* fungsi transfer sistem awal dan sistem tereduksi seperti pada Gambar 4.14.



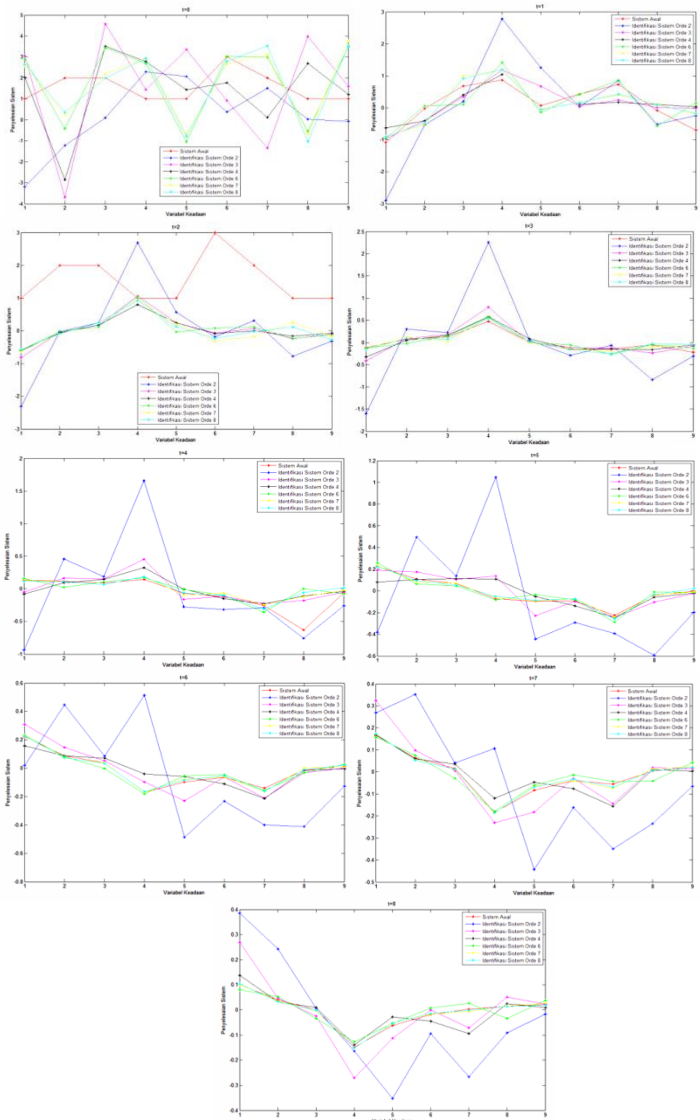
Gambar 4.14 Grafik *Error* Fungsi Transfer Untuk Semua Sistem Tereduksi

Tabel 4.18 Norm *Error* Fungsi Transfer Untuk Semua Sistem Tereduksi

Orde Reduksi	Norm *Error*
2	1,6864
3	0,8037
4	0,2293
6	0,0115
7	0,0018
8	1,3617e-005

Berdasarkan Gambar 4.14, terlihat bahwa *error* semua sistem tereduksi mendekati nol. Sedangkan pada Tabel 4.18, terlihat bahwa norm *error* sistem terbesar adalah sistem tereduksi orde 2 dan norm *error* sistem terkecil adalah sistem tereduksi orde 9. Hal ini menunjukkan, semakin banyak variabel keadaan yang dipotong, semakin besar pula *error* yang akan terjadi. Namun untuk sistem dengan pemotongan variabel keadaan yang banyak, lebih memudahkan proses perhitungan.

Selanjutnya, untuk mendapatkan hasil identifikasi terbaik dari berbagai kasus di atas dapat dilihat melalui Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Grafik Perbandingan Sistem Awal dan Identifikasi Sistem Tereduksi SemuaOrde

Dari Gambar 4.15, terlihat bahwa sedikitnya variabel keadaan yang dipotong dan semakin lama performasi membuat sistem teridentifikasi semakin mendekati sistem awalnya. Hal ini bersesuaian dengan hasil *error* sistem awal dan sistem tereduksi, yang artinya sistem teridentifikasi tetap memiliki sifat sistem awal walaupun sudah mengalami transformasi dan tetap bersesuaian dengan sistem tereduksi walaupun terjadi penambahan variabel kembali.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dalam Tugas Akhir ini, didapatkan langkah – langkah identifikasi sistem sebagai berikut :

a. Mengkonstruksikan sistem awal yang bersifat stabil, terkendali, dan teramati. Kemudian akan dicari penyelesaian persamaan diferensial sistem awal tersebut dengan kondisi awal x_0 dan $t = (0, n)$.
b. Mengkonstruksikan sistem setimbang dengan membentuk matriks transformasi T.
c. Mendapatkan penyelesaian persamaan diferensial sistem tereduksi dengan kondisi awal $\tilde{x}(0)$ dan $t = (0, n)$.
d. Mengidentifikasi sistem tereduksi dengan cara perkalian anatara T_r dan $\tilde{x}_r$.

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini diperoleh hasil simulasi dengan beberapa kasus identifikasi sistem tereduksi orde yang berbeda, yaitu orde 8, orde 7, orde 6, orde 4, orde 3, dan orde 2. Didapatkan perbandingan performasi sistem teridentifikasi yang mendekati sistem awalnya, dan semakin sedikit variabel yang dipotong menghasilkan dinamika sistem yang lebih stabil.

5.2 Saran

Perlu dikembangkan penerapan dari reduksi model pada sistem linear waktu kontinu pada suatu model tertentu agar dapat diketahui bagaimana pengaruh reduksi model pada hasil dari model tersebut.

"Halaman ini sengaja dikosongkan"

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arif, D.K. dkk. (2014). "*Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction".* International Journal Control and Automation (IJCA)*,* Vol 7. No 9, 257-270.

[2] Arif, D. K. (2014). "Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi". Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

[3] Gregoriadis, K. M. (1995). *"Optimal Model Reduction via Linear Matrix inequalities: Continuous and Discrete-Time Cases"*. System and Control Letter 26, 321-333.

[4] Zhou, K., Doyle, J. C., & Glover, K. (1996). "*Robust and Optimal Control"*. Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey.

[5] Subiono. (2013). "Sistem Linear dan Kontrol Optimal". Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[6] Ogata, Katsuhiko. (2010). "*Modern Control Engineering*"**.** Prentince-Hall, One Lake Street, Upper Saddle River, New Jersey.

[7] Anton, Howard dan Rorres, Chris. (2005). "*Elementary Linear Algebra 9th Edition*". New York: John Wiley & Sons.

[8] Zhou, K. (1999). "*Essentials of Robust Control*". Prentice-Hall, Lousiana.

[9] Bikash Pal, Balarko Chaudhuri. (2005). "*Robust Control in Power Systems"* **.** Springer US**.** Linier Control in Power Systems, 23 – 36.

[10] Kartika, Dyah Ayu. (2016). “Analisis Reduksi Model Pada Sistem Linear Waktu Kontinu”**.** Tugas Akhir - Jurusan Matematika Fakultas MIPA : Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[11] Ghosh, Sudipta dan Senroy, Nilanjan. (2013). *“Balanced Truncation Based Reduced Order Modelling of Wind Farm”***.** Electrical Power and Energy Systems 53, 649-655.

[12] Nur Asiyah, Setyo Winarko, “ Buku Ajar Persamaan diferensial Biasa” 2012.

LAMPIRAN 1
Simulasi Tambahan

Konstruksi Sistem Awal

Mulanya dikonstruksi matriks diagonal $A, B, C,$ dan D dengan ukuran masing-masing 9x9, 9x1, 1x9 dan 1x1 secara berturut-turut bersifat stabil, terkendali dan teramati.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 3 & -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 3 & -2 & 4 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & 3 & -3 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 & -5 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 1 & -2 & 4 & -6 & 3 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & -1 & 6 & -5 & 2 & -7 & 2 & -2 \\ 6 & -1 & 3 & -3 & 6 & -1 & 2 & -8 & 3 \\ -7 & 1 & -5 & 4 & -3 & 2 & -2 & 5 & -9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

Diperoleh nilai eigen dari matriks A

Tabel 1 Nilai Eigen Matriks A

i	λ_i
1	$-23{,}9828$
2	$-1{,}0926 + 3{,}5212i$
3	$-1{,}0926 - 3{,}5212i$
4	$-0{,}1854 + 0{,}3015i$
5	$-0{,}1854 - 0{,}3015i$
6	$-2{,}1718$
7	$-5{,}9980 + 1{,}1737i$
8	$-5{,}9980 - 1{,}1737i$
9	$-4{,}2933$

Karena $Re(\lambda_i) < 0$ maka sistem (A, B, C, D) stabil asimtotik.

Matriks keterkendalian (M_c) sistem (A, B, C, D) yaitu

$$M_c = (1.0e+011)\begin{bmatrix} 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0013 & -0.0310 & 0.7426 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0005 & -0.0120 & 0.2873 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0019 & -0.0450 & 1.0786 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0017 & 0.0412 & -0.9884 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0016 & -0.0382 & 0.9172 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0020 & 0.0483 & -1.1583 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0025 & -0.0598 & 1.4336 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0001 & -0.0028 & 0.0677 & -1.6247 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0001 & 0.0035 & -0.0844 & 2.0234 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan matriks keterendalian di atas, diperoleh rank $M_c = 9$. Karena dimensi rank matriks keterkendalian = rank dimensi matriks A, maka sistem (A, B, C, D) terkendali.

Matriks keteramatan (M_o) sistem (A, B, C, D) yaitu

$$M_o = (1.0e+010)\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0006 & 0.0004 & -0.0004 & 0.0006 & -0.0006 & 0.0005 & -0.0005 & -0.0005 & -0.0005 \\ 0.0145 & -0.0103 & 0.0099 & -0.0153 & 0.0156 & -0.0113 & 0.0125 & 0.0125 & 0.0114 \\ -0.3477 & 0.2474 & -0.2382 & 0.3663 & -0.3736 & 0.2721 & -0.2998 & -0.2998 & -0.2744 \\ 8.3397 & -5.9335 & 5.7131 & -8.7849 & 8.9599 & -6.5247 & 7.1884 & 7.1884 & 6.5813 \end{bmatrix}$$

Dari perhitungan matriks keterendalian di atas, diperoleh rank $M_o = 9$. Karena dimensi rank matriks keterkendalian = rank dimensi matriks A, maka sistem (A, B, C, D) teramati.

Konstruksi Sistem Setimbang

Setelah diperoleh suatu sistem yang stabil, terkendali, dan teramati, maka dapat diperoleh nilai gramian keterkendalian dan gramian keteramatan yang nantinya digunakan untuk membentuk matriks transformasi T. Kemudian matriks T, transformasikan dengan sistem awal sehingga diperoleh sistem setimbang $\left(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, D\right)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -0.0444 & 0.7030 & 0.0570 & 0.2150 & 0.0103 & -0.2598 & -0.0153 & -0.0042 & -0.0004 \\ -0.7030 & -1.1614 & -0.2116 & -2.6449 & -0.0662 & 2.7331 & 0.1074 & 0.0297 & 0.0025 \\ -0.0570 & -0.2116 & -0.0452 & -2.0068 & -0.0183 & 0.8646 & 0.0318 & 0.0088 & 0.0007 \\ 0.2150 & 2.6449 & 2.0068 & -2.0598 & -0.1961 & 5.2300 & 0.2487 & 0.0690 & 0.0058 \\ -0.0103 & -0.0662 & -0.0183 & 0.1961 & -0.0186 & 11.9996 & 0.0576 & 0.0158 & 0.0013 \\ -0.3598 & -2.7331 & -0.8646 & 5.2300 & -11.9996 & -28.9352 & -2.3643 & -0.6618 & -0.0561 \\ -0.0153 & -0.1074 & -0.0318 & 0.2487 & -0.0576 & -2.3643 & -4.2248 & -2.1762 & -0.1983 \\ -0.0042 & -0.0297 & -0.0088 & 0.0690 & -0.0158 & -0.6618 & -2.1762 & -4.3103 & -0.7357 \\ 0.0004 & 0.0025 & 0.0007 & -0.0058 & 0.0013 & 0.0561 & 0.1983 & 0.7357 & -4.2003 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.4027 \\ 1.4999 \\ 0.1975 \\ -1.1459 \\ 0.0452 \\ 1.6764 \\ 0.0693 \\ 0.0192 \\ -0.0016 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [0.403 \quad -1.5 \quad -0.2 \quad -1.15 \quad -0.05 \quad 1.68 \quad 0.07 \quad 0.002 \quad 0.0016]$$

$$D = 0$$

Sistem setimbang yang terbentuk kan tetap bersifat stabil, terkendali, dan teramati seperti yang telah dibuktikan di Bab 4.

Identifikasi Sistem

(i). Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal

Dengan matriks A dan nilai $Re(\lambda_i) < 0$ dan kondisi awal sebagai berikut :

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

maka diperoleh penyelesaian umum persamaan diferensial sistem awal untuk $t = (0,8)$ adalah

Tabel 2 Penyelesaian Persamaan Differensial Sistem Awal Terhadap Waktu

x	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	-3,8425	-4,5549	-5,8329	-5,7375	-5,1894	-4,248	-3,1617	-2,0852
2	2	0,3004	-1,763	-1,2069	-1,3484	-1,085	-0,8534	-0,5908	-0,3502
3	3	-1,2842	-5,2058	-7,2553	-7,7992	-7,447	-6,3948	-5,0203	-3,5468
4	1	2,0142	3,1331	3,4658	3,2053	2,7679	2,1453	1,5059	0,9046
5	2	0,3322	0,427	0,7022	0,6186	0,6185	0,5042	0,391	0,2668
6	3	-0,7	1,0612	0,954	1,1899	1,1007	0,9577	0,7538	0,535
7	1	2,6492	3,7431	4,5116	4,3438	3,8533	3,0914	2,2515	1,4374
8	2	-2,1561	-3,1097	-4,2505	-4,3234	-3,9931	-3,3387	-2,5413	-1,729
9	3	1,9521	5,0092	6,4716	6,7787	6,3318	5,3451	4,1194	2,8435

(ii). Mendapatkan Sistem Setimbang

Tabel 3 Penyelesaian Sistem Setimbang Terhadap Waktu

$\tilde{x}$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10,444	11,231	9,6744	8,2984	6,2743	4,2861	2,4578	0,9424	-0,2003
2	-1,9308	0,3062	0,0301	-2,0561	-2,3725	-2,7087	-2,5369	-2,1914	-1,7174
3	-12,321	-5,5179	-1,5456	0,344	2,2021	3,0003	3,3331	3,1884	2,7658
4	-16,61	1,1307	-2,3479	-0,8984	-0,5633	-0,207	0,1041	0,2733	0,3784
5	-16,453	-0,0313	-1,4406	-0,2129	-0,1486	0,1674	0,2976	0,3716	0,3827
6	4,8875	0,2693	0,083	0,0192	0,0433	0,0064	0,0032	-0,0081	-0,0122
7	9,0362	0,3693	-0,0759	-0,0881	-0,0498	-0,0002	0,0269	0,0462	0,0536
8	-6,4643	-0,5419	-0,0481	0,0366	0,0164	0,0069	-0,0036	-0,0101	-0,0135
9	-4,3475	-0,2246	-0,0155	0,0016	0,0017	0,0011	0,0001	-0,0005	-0,0009

(iii). Mendapatkan Identifikasi Sistem

Setelah sistem setimbang didapat, akan dilakukan pemotongan variabel agar sistem tereduksi. Pemotongan sitem dapat dilihat dari loncatan Nilai Singular Hankel yang paling besar. Identifikasi sistem tereduksi dapat dibagi ke dalam beberapa kasus. Bergantung pada berapa orde yang tereduksi.

a. Kasus 1

Pada kasus 1, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 2. Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi orde 2 untuk $t = (0,8)$ adalah

Tabel 4 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 2

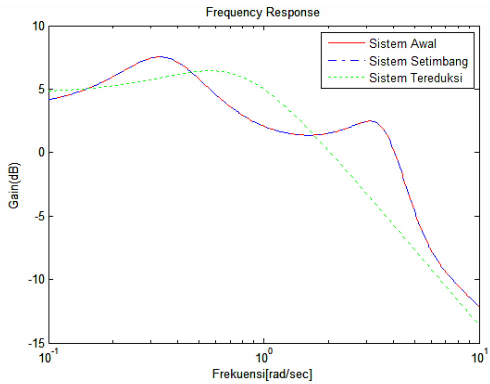
$\tilde{x}_r^2$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10,444	7,5783	4,422	2,136	0,8037	0,161	-0,08	-0,128	-0,104
2	-1,931	-4,286	-3,692	-2,395	-1,28	-0,558	-0,173	-0,005	0,0469

Sehingga diperoleh hasil identifikasi sistem orde 2 seperti berikut

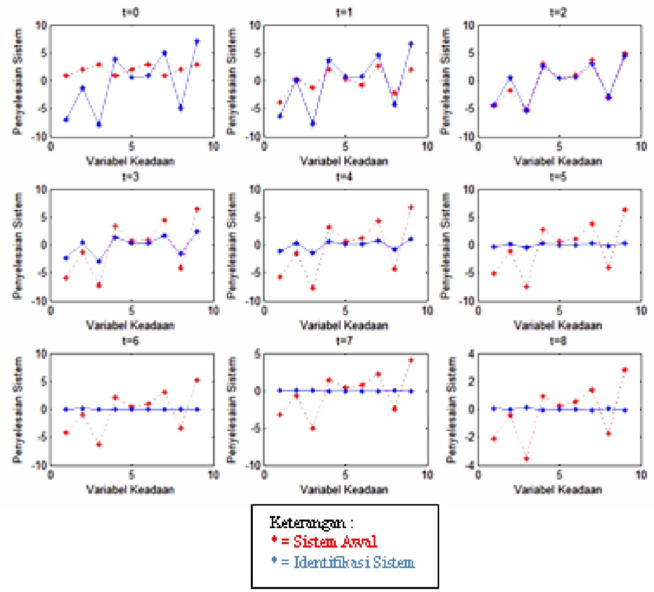
Tabel 5 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 2

x_{id}^2	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-6,999	-6,431	-4,311	-2,369	-1,069	-0,356	-0,034	0,0725	0,0825
2	-1,301	0,1556	0,5447	0,4961	0,3311	0,1813	0,0815	0,0269	0,0024
3	-7,97	-7,78	-5,364	-3,014	-1,396	-0,489	-0,069	0,0781	0,0983
4	3,8943	3,795	2,6145	1,4682	0,6797	0,2375	0,033	-0,038	-0,048
5	0,6842	0,7005	0,4929	0,2813	0,1326	0,0479	0,008	-0,006	-0,009
6	0,866	0,8104	0,548	0,3032	0,138	0,0467	0,0052	-0,009	-0,103
7	5,0449	4,6349	3,1067	1,707	0,7703	0,2562	0,0245	-0,052	-0,059
8	-4,951	-4,412	-2,912	-1,58	-0,702	-0,226	-0,015	0,0527	0,057
9	7,1894	6,7011	4,5229	2,4991	1,1353	0,3826	0,0412	-0,074	-0,086

Pada Gambar 1, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 2 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang sama. Sedangkan pada Gambar 2, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 2 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa sistem teridentifikasi berbeda dengan sistem awalnya.



Gambar 1 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 2



Gambar 2 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 2

b. Kasus 2

Pada kasus 2, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 5. Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi orde 5 untuk $t = (0,8)$ adalah

Tabel 6 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 5

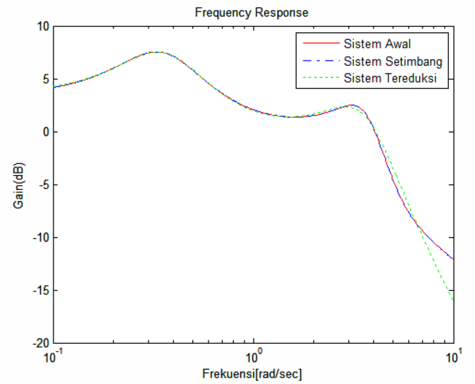
$\tilde{x}_r^5$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10,444	11,514	9,4721	7,6234	5,5231	3,6313	2,0458	0,8497	0,0454
2	-1,9308	0,6539	-1,3413	-2,0801	-2,3158	-2,2064	-1,8396	-1,352	-0,8307
3	-12,321	-3,4896	-1,8826	-0,0141	0,9259	1,2624	1,1434	0,7281	0,1609
4	-16,61	1,8686	-1,7997	-0,3164	-0,1305	0,2182	0,3989	0,4982	0,5194
5	-16,453	-17,407	-17,174	-16,995	16,66	-16,258	-15,8149	-15,3617	-14,92

Sehingga diperoleh hasil identifikasi sistem orde 5 sebagai berikut

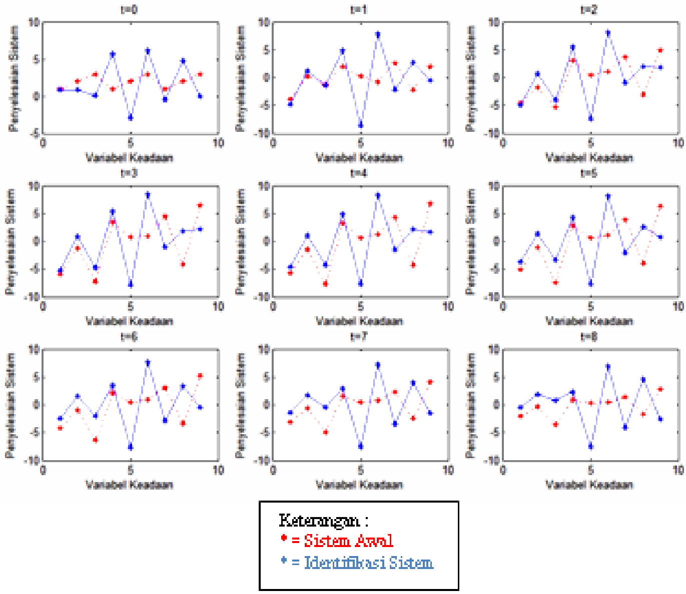
Tabel 7 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 5

x_{id}^{5}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,9174	-4,8249	-4,9279	-5,2629	-4,6232	-3,672	-2,5412	-1,4294	-0,4485
2	0,8699	1,2039	0,7025	0,9743	1,1113	1,3559	1,5764	1,7712	1,918
3	0,0938	-1,4087	-4,0852	-4,7288	-4,4042	-3,3735	-1,9918	-0,5247	0,8352
4	5,7453	4,9356	5,6115	5,4323	4,9587	4,3011	3,5842	2,9028	2,3149
5	-2,9183	-8,7234	-7,4781	-7,8296	-7,7929	-7,7945	-7,7375	-7,6455	-7,5211
6	6,1915	7,906	8,2896	8,501	8,4238	8,1623	7,7879	7,3632	6,9372
7	-0,5024	-2,1975	-0,9541	-1,1065	-1,5256	-2,1979	-2,9369	-3,6346	-4,2179
8	4,7779	2,8291	2,0518	1,8394	2,1408	2,7115	3,4032	4,0878	4,6826
9	-0,0403	-0,425	1,8958	2,1404	1,7387	0,7829	-0,4052	-1,6206	-2,7127

Pada Gambar 3, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 5 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang hampir sama. Sedangkan pada Gambar 4, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 5 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa sistem teridentifikasi masih berbeda dengan sistem awalnya.



Gambar 3 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 5



Gambar 4 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 5

c. Kasus 3

Pada kasus 3, akan dibentuk identifikasi sistem tereduksi orde 8. Penyelesaian umum persamaan diferensial sistem tereduksi orde 2 untuk $t = (0,8)$ adalah

Tabel 8 Penyelesaian Sistem Tereduksi Orde 8

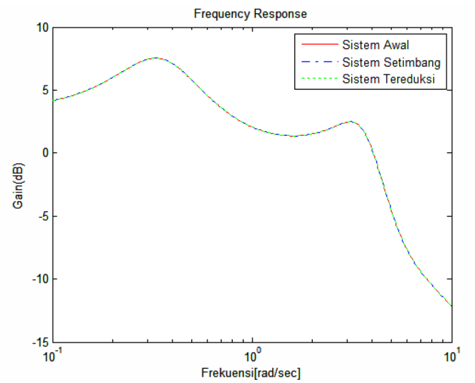
$\tilde{x}_r^8$	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	10,444	11,231	9,674	8,298	6,2744	4,2865	2,4585	0,9431	-0,1996
2	-1,931	0,3067	0,0289	-2,055	-2,3719	-2,7081	-2,5366	-2,1912	-1,7174
3	-12,32	-5,517	-1,548	0,3427	2,2007	2,9993	3,3324	3,1879	2,7656
4	-16,61	1,1306	-2,347	-0,899	-0,5635	-0,2072	0,1039	0,2731	0,3783
5	-16,45	-0,037	-1,442	-0,214	-0,1488	0,1673	0,2975	0,3715	0,3827
6	4,8875	0,2687	0,0831	0,0193	0,0433	0,0064	0,0032	-0,0081	-0,0122
7	9,0362	0,432	-0,061	-0,086	-0,0497	-0,0003	0,0269	0,0462	0,0536
8	-6,464	-0,659	-0,066	0,0343	0,0166	0,0071	-0,0036	-0,0102	-0,0137

Sehingga diperoleh hasil identifikasi sistem orde 8 sebagai berikut

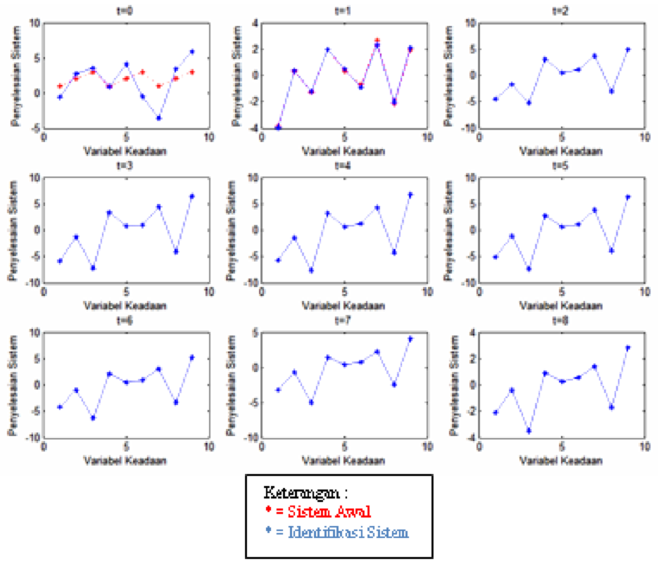
Tabel 9 Hasil Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 8

x_{id}^{8}	t								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-0,661	-3,95	-4,565	-5,832	-5,736	-5,1884	-4,2478	-3,162	-2,0858
2	2,7767	0,3632	-1,755	-1,207	-1,349	-1,0851	-0,8534	-0,5907	-0,3501
3	3,4936	-1,236	-5,199	-7,253	-7,798	-7,4661	-6,3943	-5,0201	-3,5469
4	0,8752	1,9748	3,1267	3,4643	3,205	2,7678	2,1454	1,506	0,9047
5	4,0827	0,4723	0,4419	0,7023	0,6178	0,6178	0,5041	0,3912	0,2673
6	-0,541	-0,916	1,0413	0,9542	1,191	1,1015	0,9578	0,7534	0,5343
7	-3,628	2,3753	3,7165	4,5107	4,3448	3,8542	3,0914	2,2511	1,4366
8	3,382	-2,044	-3,098	-4,249	-4,323	-3,993	-3,3385	-2,5411	-1,7288
9	5,9286	2,0996	5,0204	6,4692	6,7764	6,3303	5,3447	4,1197	2,8443

Pada Gambar 5, akan ditunjukkan performasi sistem awal, sistem setimbang, dan sistem tereduksi orde 8 jika diberikan input berupa frekuensi. Terlihat bahwa sistem memiliki perfomansi yang sama. Sedangkan pada Gambar 6, akan ditunjukkan performasi sistem awal dengan sistem tereduksi orde 8 yang sudah diidentifikasi dalam interval waktu $t = (0,8)$. Terlihat bahwa semakin lama sistem teridentifikasi semakin mendekati bahkan sama seperti sistem awalnya.

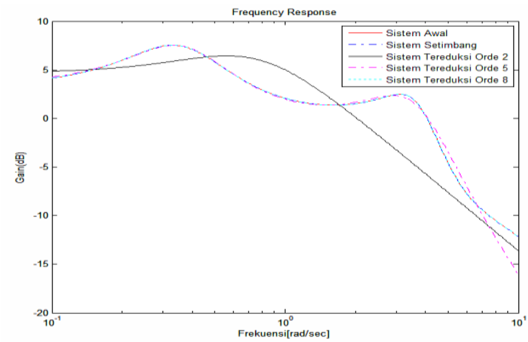


Gambar 5 Grafik Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Sistem Tereduksi Orde 8



Gambar 6 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Orde 8

Berdasarkan kasus – kasus pembentukan sistem di atas, respon frekuensi dapat disusun menjadi satu grafik seperti pada Gambar 7 sehingga lebih mudah diamati.

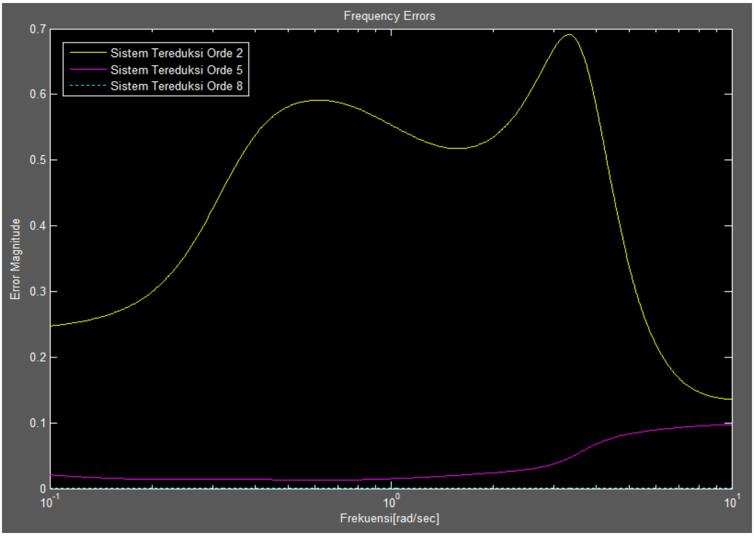


Gambar 7 Respon Frekuensi Sistem Awal, Sistem Setimbang, dan Semua Sistem Tereduksi

Setelah mengamati semua performansi sistem yang ada, selanjutnya diperoleh nilai *error* fungsi transfer sistem awal dan sistem tereduksi seperti pada Tabel 10 dan Gambar 8.

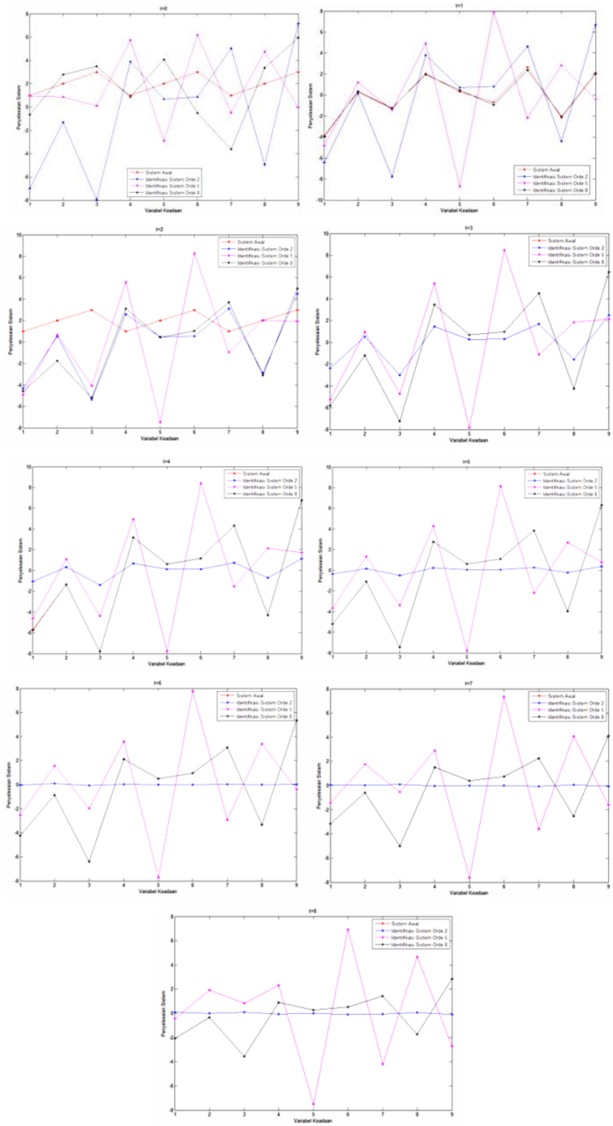
Tabel 10 Norm *Error* Fungsi Transfer Untuk Semua Sistem Tereduksi

Orde Reduksi	Norm *Error*
2	0,6912
5	0,0983
8	6,2901e-007



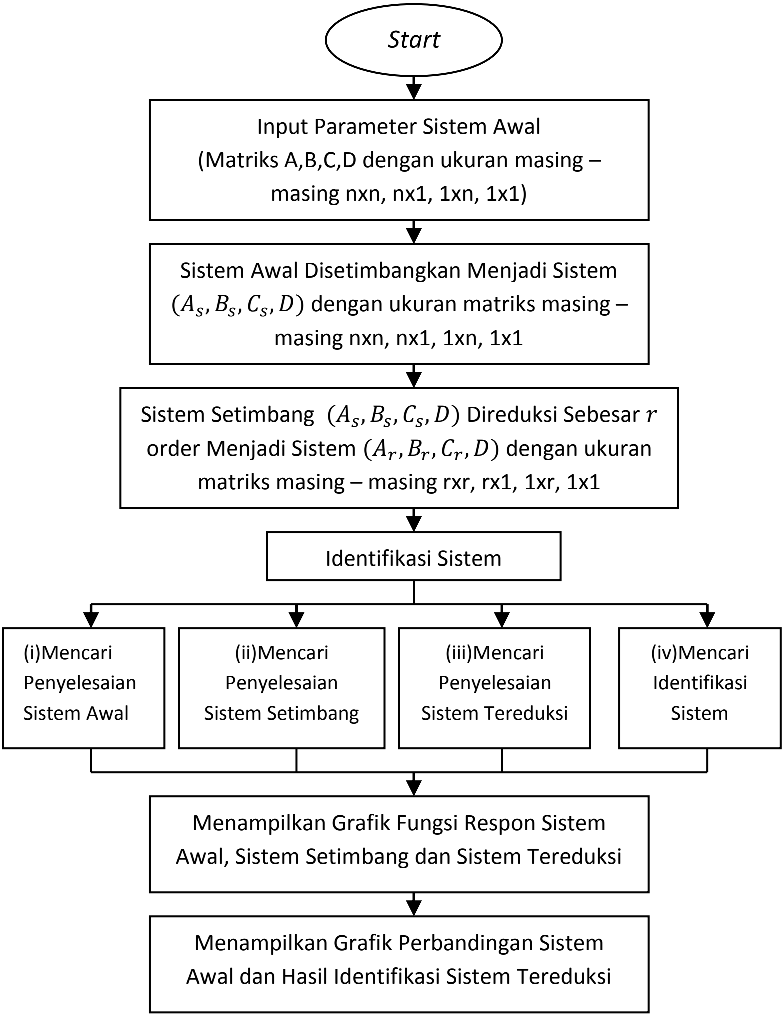
Gambar 8 Grafik *Error* Fungsi Transfer Untuk Semua Sistem Tereduksi

Selanjutnya, untuk mendapatkan hasil identifikasi terbaik dari berbagai kasus di atas dapat dilihat melalui Gambar 9.



Gambar 9 Grafik Perbandingan Sistem Awal dengan Identifikasi Sistem Tereduksi Semua Orde

LAMPIRAN 2
Flowchart



LAMPIRAN 3
Listing Program

```
clc;
clear all;
disp('Simulasi Tugas Akhir')
disp('Identifikasi Variabel Sistem Tereduksi
Linier Waktu Kontinu ')
disp('==========================================
=========================')
disp('Diberikan matriks A,B,C,D untuk sistem
(A,B,C,D) model awal sebagai berikut');
n=input('Masukkan Besar Ukuran Matriks yang
dikehendaki:');
A=input('Masukkan Nilai Matriks A:')
%% Menentukan nilai eigen (stabil atau tidak
stabil)
Eigen_A=eig(A)
Tak_Stabil = 0;
Stabil = 0;
Stabil_Asimtotik = 0;
for i = 1:n
    if Eigen_A(i) > 0
        Tak_Stabil = Tak_Stabil +1;
    end
    if Eigen_A(i) == 0
        Stabil = Stabil +1;
    end
    if Eigen_A(i) < 0
        Stabil_Asimtotik = Stabil_Asimtotik +1;
    end
end
Tak_Stabil
Stabil
Stabil_Asimtotik
%% Terkendali
B=input('Masukkan Nilai Matriks B:')
disp('Matriks Keterkendalian = ');
disp(ctrb(A,B));
```

```
disp('Rank Matriks Keterkendalian = ');
disp (rank(ctrb(A,B)));
%% Teramati
C=input('Masukkan Nilai Matriks C:')
disp('Matriks Keteramatan = ');
disp(obsv(A,C));
disp('Rank Matriks Keteramatan = ');
disp (rank(obsv(A,C)));
%% Matriks D
D=input('Masukkan Nilai Matriks D:')
%% Model Awal
modelawal=ss(A,B,C,D)
%% Gramian
disp('I. Mendapatkan Gramian Keterkendalian (W)
dan Gramian Keteramatan (M)')
W=gram(modelawal,'c')
M=gram(modelawal,'o')
%% Matriks Psi
disp('II. Menentukan Matriks Psi Sedemikian
Hingga W=Psitrans*Psi')
Psi=chol(W)
cekW=Psi'*Psi;
%% Diagonalisasi
disp('III. Diagonalisasi Psi*M*Psitrans Sehingga
Psi*M*Psitrans=U*(Sigma^2)*Utrans')
Z=Psi*M*Psi';
[U,L,U]=svd(Z)
cekz=U*L*U';
sigma=(L).^(1/2);
%% Matriks Transformasi T
disp('IV. Menghitung Matriks Transformasi T')
T=Psi'*U*inv(sqrt(sigma))
%% Sistem Setimbang
disp('V. Mendapatkan Sistem Setimbang')
As=inv(T)*modelawal.a*T
Bs=inv(T)*modelawal.b
Cs=modelawal.c*T
Ds=modelawal.d
modelsetimbang=ss(As,Bs,Cs,Ds);
disp('Menguji Kestabilan Sistem Setimbang')
```

```
Eigen_As=eig(As)
Tak_Stabil = 0;
Stabil = 0;
Stabil_Asimtotik = 0;
for i = 1:n
    if Eigen_A(i) > 0
        Tak_Stabil = Tak_Stabil +1;
    end
    if Eigen_A(i) == 0
        Stabil = Stabil +1;
    end
    if Eigen_A(i) < 0
        Stabil_Asimtotik = Stabil_Asimtotik +1;
    end
end
Tak_Stabil
Stabil
Stabil_Asimtotik
disp('Menguji Keterkendalian Sistem Setimbang')
KendaliSetimbang=ctrb(modelsetimbang)
RankKendaliSetimbang=rank(KendaliSetimbang)
disp('Menguji Keteramatan Sistem Setimbang')
AmatiSetimbang=obsv(modelsetimbang)
RankAmatiSetimbang=rank(AmatiSetimbang)
disp('Gramian Keterkendalian dan Gramian
Keteramatan Sistem Setimbang')
W_Setimbang=gram(modelsetimbang,'c')
M_Setimbang=gram(modelsetimbang,'o')
%% Sistem Tereduksi
disp('VI. Mendapatkan Sistem Tereduksi')
x=input('Masukkan Besar Orde Sistem
Tereduksi:');
sys2=ss(As,Bs,Cs,Ds);
disp('Mendapatkan Sistem Tereduksi')
orde=zeros(1,n-x);
for i=1:n-x
    orde(1,i)=x+i;
end
rsys=modred(sys2,orde,'truncate')
Ar=rsys.a;
```

```
Br=rsys.b;
Cr=rsys.c;
Dr=rsys.d;
disp('Menguji Kestabilan Sistem Tereduksi')
Eigen_Ar=eig(Ar)
disp('Menguji Keterkendalian Sistem Tereduksi')
KendaliTereduksi=ctrb(rsys)
RankKendaliReduksi=rank(KendaliTereduksi)
disp('Menguji Keteramatan Sistem Tereduksi')
AmatiTereduksi=obsv(rsys)
RankAmatiTereduksi=rank(AmatiTereduksi)
%% Identifikasi Sistem
disp('VII. Identifikasi Sistem')
%% Penyelesaian Sistem Awal
disp('Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal')
A
[V,Di]=eig(A);
x0=input('Masukkan nilai x0: ');
Ca=linsolve(V,x0)
R=eig(A);
%% Waktu
k=input('Masukkan jumlah t: ');
for i=1:k
    t(:,i)=i-1;
end
%% Hasil xt
eks=exp(R*t);
for i=1:k
    CEks(:,i)=Ca.*eks(:,i);
    xt(:,i)=V*CEks(:,i);
end
xt;
xt=real(xt)
%% Mendapatkan Sistem Setimbang
disp('Mendapatkan Sistem Setimbang')
T;
Ti=inv(T)
xtilda=Ti*xt;
xtilda=real(xtilda)
%% Penyelesaian Sistem Tereduksi
```

```
disp('Mendapatkan Penyelesaian Sistem
Tereduksi')
Ar=rsys.a
[Vr,Dir]=eig(Ar);
xtildat=xtilda(:,1);
sys3=ss(T,xtildat,Cs,Ds);
rsys2=modred(sys3,orde,'truncate');
xtildar=rsys2.b
Car=linsolve(Vr,xtildar)
Rr=eig(Ar);
%% Hasil xtr
eksr=exp(Rr*t);
for i=1:k
    CEksr(:,i)=Car.*eksr(:,i);
    xtr(:,i)=Vr*CEksr(:,i);
end
xtr;
xtr=real(xtr)
%% Mendapatkan Identifikasi Sistem
disp('Mendapatkan Identifikasi Sistem')
for i=1:x
    Tr(:,i)=T(:,[i]);
end
Tr;
for i=1:k
    xid(:,i)=Tr*xtr(:,i);
end
xid;
xid=real(xid)
%% Error Sistem
error=abs(xt-xid)
%% Grafik Singular Hankel
figure(1);
hsv=hsvd(modelsetimbang);
plot(hsv,'*')
xlabel('Elemen')
ylabel('Nilai Singular Hankel')
title('Nilai Singular Hankel')
%% Grafik Error
figure(2);
```

```
x=[1:9];
y1=xt(:,1);
y2=xid(:,1);
plot(x,y1,'r:*',x,y2,'b-*');
title('t=0');
xlabel('Variabel Keadaan');
ylabel('Penyelesaian Sistem');
%% Norm Error
tfawal=tf(modelawal);
tftereduksi=tf(rsys);
Error=tfawal-tftereduksi;
Norm=norm(Error,inf)
%% Grafik Frekuensi Respon
figure(3);
w=logspace(-1,1,500);
[mag,pha]=bode(A,B,C,D,1,w);
[mags,phas]=bode(As,Bs,Cs,Ds,1,w);
[magr,phar]=bode(Ar,Br,Cr,Dr,1,w);
semilogx(w,20*log10(mag),'r-
',w,20*log10(mags),'b-.',w,20*log10(magr),'g:')
title('Frequency Response');
xlabel('Frekuensi[rad/sec]');
ylabel('Gain(dB)');
legend('Sistem Awal','Sistem Setimbang','Sistem
Tereduksi');
%% Grafik Frekuensi Error
figure(4);
w=logspace(-1,1,500);
P=pck(A,B,C,D);
Pr=pck(Ar,Br,Cr,Dr);
Ger=msub(P,Pr);
Gf1=frsp(Ger,w);
[u1,s1,v1]=vsvd(Gf1);
vplot('liv,m',s1,':');
legend('Sistem Tereduksi');
title('Frequency Errors');
xlabel('Frekuensi[rad/sec]');
ylabel('Error Magnitude');
```

BIODATA PENULIS

Sheerty Putri Pertiwi atau yang biasa disapa Sheerty lahir di Surabaya, 29 Juli 1994. Penulis menempuh pendidikan di SD Negeri Kertajaya XII (Puja I) Surabaya, SMP Negeri 1 Surabaya, dan SMA Negeri 4 Surabaya. Penulis yang memiliki hobi bersepeda dan makan ini diterima di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2012. Di Jurusan Matematika ITS ini, Penulis mengambil rumpun mata kuliah pemodelan dan simulasi sistem. Penulis juga aktif dalam mengikuti organisasi, diantaranya staff Bakor Pemandu BEM FMIPA ITS, Pemandu FMIPA ITS, staff Departemen Luar Negeri HIMATIKA ITS, Staff Penelitian dan Pengembangan HIMATIKA ITS. Tidak hanya itu, Penulis juga aktif berperan dalam beberapa kegiatan kepanitian, seperti Olimpiade Matematika ITS (OMITS) dan LKKM Pra-TD FMIPA ITS.

Apabila ingin memberikan saran, kritik, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini, bisa melalui email sheertyputri@gmail.com.

Semoga bermanfaat.